Skript für den NaWiOS-Mathematikbrückenkurs

Peter Kuchling

29. Oktober 2019

1 Gleichungen

1.1 Lineare Gleichungen

Welche Zahl lässt sich für x einsetzen, damit die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x + 3 = 5?$$

Definition 1.1. Ein Ausdruck der Form

$$ax + b = cx + d$$

heißt *lineare Gleichung*. Hier sind a, b, c und d Zahlen, die vorher festgelegt sind. Sie heißen *Koeffizienten* der Gleichung. Die Zahl x ist gesucht und heißt *Unbekannte*. Der „richtige“ Wert für x heißt *Lösung* der Gleichung.

Die Gleichung heißt linear, weil die Unbekannte x nur „linear“, also ohne Potenz vorkommt.

Beispiel 1.2. *Was ist die Lösung der Gleichung*

$$x + 3 = 5?$$

(Hier ist $a = 1, b = 3, c = 0$ und $d = 5$.)

Ausprobieren gibt $x = 2$.

Wie löst man solche Gleichungen allgemein?$\rightarrow$ Äquivalenzumformungen: Die Gleichheit bleibt erhalten, wenn wir auf beiden Seiten von „=“ das gleiche tun.

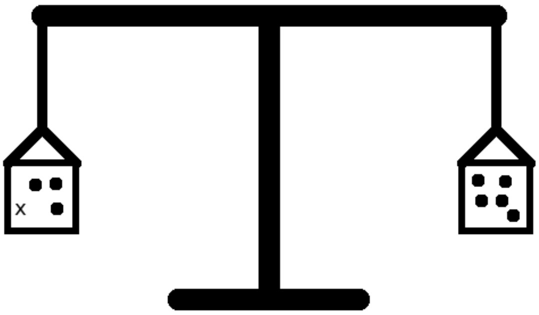
In unserem Beispiel können wir auf beiden Seiten -3 rechnen:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 5 \\ \Leftrightarrow x + 3 - 3 &= 5 - 3 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

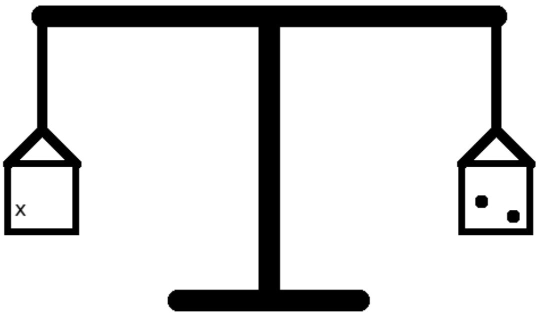
(Normalerweise schreibt man den Schritt in der Mitte nicht aus.)

Das Symbol „$\Leftrightarrow$“ heißt *Äquivalenzpfeil*. Der Pfeil bedeutet, dass die untere Gleichung das gleiche Bedeutet wie die Gleichung davor.

Bemerkung. Man kann sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellen, die im Gleichgewicht gehalten wird (siehe Skizze). Eine Äquivalenzumformung bedeutet, dass man beide Seiten der Waage so verndert, dass die Waage im Gleichgewicht bleibt.



Entfernen von drei Kugeln auf beiden Seiten:



Welche Umformungen sind erlaubt?

- Addition von Zahlen
- Subtraktion von Zahlen
- Multiplikation von Zahlen außer Null
- Division von Zahlen außer Null.

Manchmal schreibt man auf die rechte Seite der Umformung, was man gemacht hat. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \qquad | : 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Weitere Beispiele für solche Umformungen:

- $$\begin{aligned} \frac{5}{7}x &= 5 \qquad \Big| : \frac{5}{7} \\ \Leftrightarrow x &= 5 : \frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{7}{5} = 7 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 5x + 10x &= 5 \qquad &&| \text{ Zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow 15x &= 5 &&| : 15 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x+7) + 7 &= 10 \qquad &&| - 7 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+7) &= 3 &&| \cdot 3 \text{ oder } : \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x + 7 &= 9 &&| - 7 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Das Ziel der Umformungen ist immer, dass die Unbekannte „alleine“ steht. Man arbeitet sich von „außen“ nach „innen“ an die Unbekannte heran.

1.2 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung, in dem zusätzlich der Ausdruck „x^2“ vorkommt, heißt *quadratische Gleichung.*

Satz 1.3 (p-q-Formel)**.** *Die Gleichung*

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bemerkung. 1. Das Ziel bei quadratischen Gleichungen ist es, die Gleichung durch Umformungen auf die Form (1) zu bringen. Die Form (1) heißt auch *Normalform.*

2. Eine ähnliche Form ist auch als a-b-c-Formel oder „Mitternachtsformel“ bekannt: Für die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

wobei $a \neq 0$ sein muss. Die Form (1) erhält man, indem man diese Gleichung durch a teilt.

Bevor wir uns Beispiele für quadratische Gleichungen anschauen, wollen wir diese Formel herleiten (oder beweisen). Dazu ein kleiner Exkurs:

Satz 1.4 (Binomische Formeln)**.** *Seien a und b zwei Zahlen. Dann gelten die folgenden Formeln:*

- *(1. Binomische Formel)* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- *(2. Binomische Formel)* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- *(3. Binomische Formel)* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beweis. Wir leiten die erste Formel her. Die zweite und dritte können als Übungsaufgabe gelöst werden.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \overset{(*)}{=} a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) \overset{(*)}{=} a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

wobei in $(*)$ jeweils das Distributivgesetz benutzt wurde. □

Mit Hilfe der binomischen Formeln lassen sich bestimmte Rechnungen leichter im Kopf machen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 11^2 &= (10+1)^2 = 10^2 + 2\cdot 10\cdot 1 + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121 \\ 105^2 &= (100+5)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025 \\ 95^2 &= (100-5)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 5 + 5^2 = 10000 - 1000 + 25 = 9025 \\ 18\cdot 22 &= (20-2)(20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396 \end{aligned}$$

Bemerkung.
- Die binomischen Formeln sind auch nützlich, wenn wir einen Ausdruck der Form
$$a^2 \pm 2ab + b^2$$
haben. Dieser lässt sich dann „schöner“ als $(a \pm b)^2$ schreiben.
- Für die Herleitung benutzen wir nicht nur die Äquivalenzumformungen. Zusätzlich müssen wir auch noch die *Wurzel ziehen*. Bei dieser Umformung enstehen zwei Möglichkeiten, weil z.B. $2^2 = 4$, aber auch $(-2)^2 = 4$. Dafür schreiben wir $\pm$ vor die Wurzel.

Beweis der p-q-Formel. Für die Herleitung der Formel benutzen wir die *quadratische Ergänzung*:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)\cdot x + q &= 0 \qquad \text{quadratische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{passt für binom. Formel!}} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \qquad \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad |\text{Wurzel ziehen} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \text{Achtung: siehe Bemerkung.} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Wurzel ist (bei reellen Zahlen) nur für positive Zahlen definiert. Daher funktioniert die Rechnung oben nur, wenn

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

(„größer oder gleich Null“). Es kann also passieren, dass eine quadratische Gleichung gar keine Lösung besitzt! Wir unterscheiden drei Fälle:

- Es gibt zwei verschiedene Lösungen.
- Es gibt genau eine Lösung.
- Es gibt keine (reelle) Lösung.

Kommen wir zu einigen Beispielen.

Beispiel 1.5. *1.* $x^2 + 5x - 6$*:*

Mit der p-q-Formel erhalten wir

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-6)} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

also haben wir die Lösungen $x_1 = 1$ *und* $x_2 = -6$*.*

2. Manchmal muss man die Gleichung erst umformen, d.h. „auf die Normalform bringen". Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= -2 \qquad | + 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 &= 0 \qquad | : 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm 0 = -1$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung!

3. $x^2 + 1$*:*

Lösungsformel:

$$x_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1}$$

Die Wurzel einer negativen Zahl (d.h. kleiner als Null) ist (für uns) nicht definiert. Daher hat diese Gleichung keine Lösung.

Auf Beispiel 2 lässt sich auch die erste binomische Formel anwenden.

1.3 Polynomgleichungen höheren Grades

Wir haben kennengelernt, wie man lineare und quadratische Gleichungen löst. Was ist aber mit Gleichungen, in denen der Ausdruck x^n für $n = 3, 4, 5, \ldots$ vorkommt?

Definition 1.6. 1. Eine Funktion P der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt *Polynom vom Grad n* (falls $a_n \neq 0$).

2. Eine Gleichung der Form

$$P(x) = 0$$

heißt *Polynomgleichung* oder *polynomielle Gleichung vom Grad n*.

Bemerkung. 1. Eine *Funktion* ist ein Ausdruck, der einer *Variablen* x einen Wert zuordnet. Wir werden in spteren Kapiteln noch weitere Funktionen kennenlernen.

2. In den beiden vorherigen Kapiteln haben wir Polynomgleichungen vom Grad $n = 1$ und $n = 2$ betrachtet.

3. Die Lösungen der Polynomgleichung $P(x) = 0$ heißen auch *Nullstellen des Polynoms* $P(x)$.

Beispiel 1.7. *1. Polynom vom Grad 1: z.B.* $P(x) = 5x + 3$

2. Polynom vom Grad 2: z.B. $P(x) = 2x^2 + 3x + 12$

Zurück zu unseren Gleichungen: Allgemeine Lösungsformeln gibt es nicht. Für Polynome dritten und vierten Grades gibt es Formeln. Diese Formeln sind allerdings sehr kompliziert und nicht sehr nützlich (siehe zum Beispiel `https://de.wikipedia.org/wiki/Polynom_vierten_Grades`).

Stattdessen wollen wir bestimmte Strategien für spezielle Polynome untersuchen:

1. Ausklammern der Variable/Unbekannten x
2. Substitution (Ersetzen durch neue Variable)
3. Polynomdivision

1.3.1 Ausklammern der Unbekannten x

Falls alle Terme die Unbekannte x enthalten, lässt sich eine Lösung schnell finden. Betrachten wir zum Beispiel die Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0. \tag{2}$$

Man sieht, dass sich diese Gleichung umschreiben lässt, indem man das x *ausklammert*:

$$\underbrace{x}_{\stackrel{!}{=}0} \cdot \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{\text{oder} \stackrel{!}{=}0} = 0.$$

Für $x = 0$ ist diese Gleichung erfüllt. Auf der anderen Seite ist die Gleichung erfüllt, wenn der zweite Term gleich Null ist. Also untersuchen wir die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Auf diese Gleichung können wir dann wieder die p-q-Formel anwenden und erhalten

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Achtung: Das „Weglassen“ von x wie oben ist *keine* Äquivalenzumformung! Wenn wir in Gleichung (2) „durch x teilen“, passieren zwei Dinge:

1. Wir teilen eventuell durch Null, weil x ja auch den Wert Null annehmen kann.
2. Wir verlieren die Lösung $x = 0$.

Das Ausklammern selbst ist hingegen eine Äquivalenzumformung.

Beispiel 1.8. *Ein weiteres Beispiel: Man kann auch Potenzen von x ausklammern:*

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(2x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ oder } 2x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x &= -1 \end{aligned}$$

Hier wurde die Lösung $x = 0$ „mitgenommen". Daher sind alle Schritte Äquivalenzumformungen.

1.3.2 Substitution

In bestimmten Fällen können wir die Unbekannte x ersetzen, oder *substituieren*. Dies ist möglich, wenn die Unbekannte x nur mit geraden Potenzen auftaucht (also $x^2, x^4, \ldots$). Betrachte zum Beispiel die Gleichung

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Wir setzen $y = x^2$ (*Substitution*), dann erhalten wir die Gleichung

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Mit der p-q-Formel erhalten wir die Lösungen

$$y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Mit anderen Worten haben wir $y_1 = 9$ und $y_2 = 4$. Aber: Wir wollen die Lösungen für x und nicht für y. Deshalb: *Rücksubstitution*:

$$x_{1,2}^2 = y_1 = 9 \text{ oder } x_{3,4}^2 = y_2 = 4$$

also erhalten wir:

$$x_{1,2} = \pm 3 \text{ oder } x_{3,4} = \pm 2.$$

Bemerkung. So direkt wie in diesem Beispiel funktioniert die Methode nur, falls der Grad des Polynoms kleiner oder gleich 4 ist. Für Polynome höheren Grades muss die Substitution mit anderen Methoden kombiniert werden.

1.3.3 Polynomdivision

Vorüberlegung: Erinnerung an die binomische Formel: Was ist die Lösung von

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 = 0?$$

Mit Lösungsformel:

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2} = a$$

Etwas allgemeiner:

$$(x-a) \cdot (x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

Mittels p-q-Formel oder direkter Überlegung sieht man, dass die Lösungen dieser Gleichung gerade $x_1 = a$ und $x_2 = b$ sind.

Die Terme der Form $(x-a)$ heißen *Linearfaktoren*.

Bemerkung. An den Linearfaktoren lassen sich die Lösungen einer Polynomgleichung ablesen!

Erinnerung: Schriftliche Division:

$$\begin{array}{l}
\;\;4\,152 : 12 = 346 \\
-3\,6 \\
\overline{} \\
\;\;\;55 \\
\;\;-48 \\
\;\;\;\overline{} \\
\;\;\;\;72 \\
\;\;-72 \\
\;\;\;\overline{} \\
\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Also gilt $4152 = 12 \cdot 346$.

$$\begin{array}{l}
\;\;78{,}7\,5 : 9 = 8,75 \\
-7\,2 \\
\overline{} \\
\;\;6{,}7 \\
\;\;-6{,}3 \\
\;\;\;\overline{} \\
\;\;\;4\,5 \\
\;\;-4\,5 \\
\;\;\;\overline{} \\
\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Also gilt $78,75 = 9 \cdot 8,75$.

Die Rechnung $4152 = 12 \cdot 346$ heißt *Faktorisierung* oder *Zerlegung in Faktoren*. Ähnlich wie Zahlen können auch Polynome (manchmal) faktorisiert werden! Dieser Vorgang nennt sich *Polynomidivision*.

Ein Beispiel:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) & : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & & \\
\hline
 & 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 & \\
 & -(6x^3 & -12x^2) & & & \\
\cline{2-3}
 & & 8x^2 & +8x & -48 & \\
 & & -(8x^2 & -16x) & & \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24x \; -48 \\ -(24x \; -48) \\ \hline 0 \end{array}$$

Satz 1.9. *Wenn a eine Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ (vom Grad n) ist, so lässt sich $P(x)$ mittels Polynomdivision schreiben als*

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a),$$

wobei $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$ ist.

Beispiel 1.10. *Betrachte das Polynom*

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Wenn wir eine der Nullstellen „erraten", dann können wir Polynomdivision anwenden. In Aufgaben versucht man normalerweise einen Faktor des letzten Koeffizienten: Versuche $a = 3$:

$$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 27 - 36 + 33 - 6 = 0$$

Also können wir den Linearfaktor $(x - 3)$ aus dem Polynom „herausteilen":

$$\begin{array}{l} \;\;(x^3 \; -6x^2 \; +11x \; -6) : (x-3) = x^2 - 3x + 2 \\ -(x^3 \; -3x^2) \\ \hline \qquad\quad -3x^2 \; +11x \; -6 \\ \qquad\; -(3x^2 \quad +9x) \\ \hline \qquad\qquad\qquad 2x \; -6 \\ \qquad\qquad\quad -(2x \; -6) \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Also können wir das Polynom zerlegen:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 3).$$

Die Nullstelle $a = 3$ kennen wir schon. Für weitere Nullstellen können wir die p-q-Formel anwenden oder versuchen, eine weitere Nullstelle zu raten. Weitere Beispiele an der Tafel und in den Übungen.

1.4 Ungleichungen

Manchmal ist es notwendig, Ausdrücke zu vergleichen oder der Größe nach zu ordnen. Wir haben die folgenden Symbole:

Symbole	Bedeutung	Beispiel
$a < b$	a ist kleiner als b	$3 < 5$
$a > b$	a ist größer als b	$1 > -2$
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b	
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b	

Mit Ungleichungen kann man rechnen wie mit Gleichungen. Es gibt nur ein paar Regeln zu beachten (Das Folgende gilt sowohl für „$<$“als auch für „$>$“, „$\leq$“ und „$\geq$“).

- **Addition und Subtraktion:** Für beliebige Zahlen x, y, a gilt

$$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$$
$$x < y \Leftrightarrow x - a < y - a$$

- **Multiplikation mit (und Division durch) positive Zahlen:** Für x, y beliebige Zahlen und $a > 0$ gilt:

$$x < y \Leftrightarrow ax < ay$$
$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{a} < \frac{y}{a}$$

Diese beiden Operationen verhalten sich also wie auch bei Gleichungen.

Aber:

- **Multiplikation (Division) mit einer negativen Zahl:**

$$x < y \Leftrightarrow -x > -y$$

- **Kehrwert bilden:**

$$x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

Mit diesen zusätzlichen Rechenregeln kann man Ungleichungen genauso „lösen“ wie Gleichungen.

Beispiel 1.11.

$$\begin{aligned} 2x + 5 < 1,5x - 7 \quad & \quad | - 1,5x \\ \Leftrightarrow 0,5x + 5 < -7 \quad & \quad | - 5 \\ \Leftrightarrow 0,5x < -12 \quad & \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x < -24 \quad & \end{aligned}$$