Skript für den NaWiOS-Mathematikbrückenkurs

Peter Kuchling

24. Oktober 2019

1 Gleichungen

1.1 Lineare Gleichungen

Welche Zahl lässt sich für x einsetzen, damit die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x + 3 = 5?$$

Definition 1.1. Ein Ausdruck der Form

$$ax + b = cx + d$$

heißt *lineare Gleichung*. Hier sind a, b, c und d Zahlen, die vorher festgelegt sind. Sie heißen *Koeffizienten* der Gleichung. Die Zahl x ist gesucht und heißt *Unbekannte*. Der „richtige" Wert für x heißt *Lösung* der Gleichung.

Die Gleichung heißt linear, weil die Unbekannte x nur „linear", also ohne Potenz vorkommt.

Beispiel 1.2. *Was ist die Lösung der Gleichung*

$$x + 3 = 5?$$

(Hier ist $a = 1, b = 3, c = 0$ und $d = 5$.)

Ausprobieren gibt $x = 2$.

Wie löst man solche Gleichungen allgemein?→ Äquivalenzumformungen: Die Gleichheit bleibt erhalten, wenn wir auf beiden Seiten von „=" das gleiche tun.

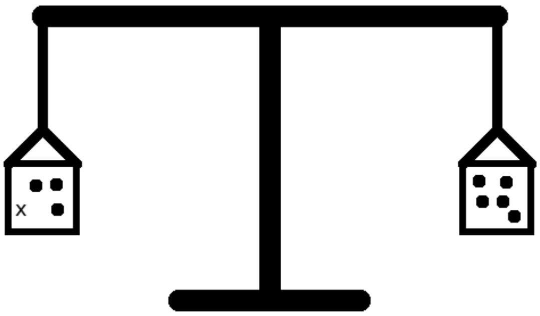
In unserem Beispiel können wir auf beiden Seiten -3 rechnen:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 5 \\ \Leftrightarrow x + 3 - 3 &= 5 - 3 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

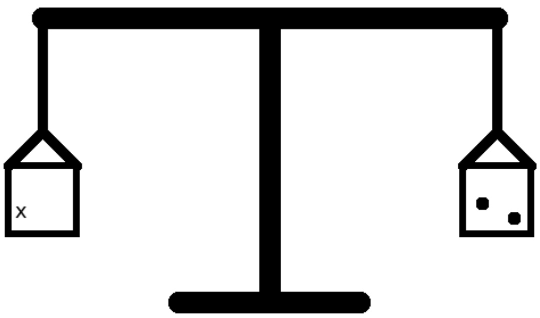
(Normalerweise schreibt man den Schritt in der Mitte nicht aus.)

Das Symbol „$\Leftrightarrow$" heißt *Äquivalenzpfeil*. Der Pfeil bedeutet, dass die untere Gleichung das gleiche Bedeutet wie die Gleichung davor.

Bemerkung. Man kann sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellen, die im Gleichgewicht gehalten wird (siehe Skizze). Eine Äquivalenzumformung bedeutet, dass man beide Seiten der Waage so verndert, dass die Waage im Gleichgewicht bleibt.



Entfernen von drei Kugeln auf beiden Seiten:



Welche Umformungen sind erlaubt?

- Addition von Zahlen
- Subtraktion von Zahlen
- Multiplikation von Zahlen außer Null
- Division von Zahlen außer Null.

Manchmal schreibt man auf die rechte Seite der Umformung, was man gemacht hat. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \qquad |:3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Weitere Beispiele für solche Umformungen:

- $$\begin{aligned} \frac{5}{7}x &= 5 \qquad \Big|:\frac{5}{7} \\ \Leftrightarrow x &= 5 : \frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{7}{5} = 7 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 5x + 10x &= 5 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow 15x &= 5 && \mid : 15 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x+7) + 7 &= 10 && \mid -7 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+7) &= 3 && \mid \cdot 3 \text{ oder } : \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x + 7 &= 9 && \mid -7 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Das Ziel der Umformungen ist immer, dass die Unbekannte „alleine“ steht. Man arbeitet sich von „außen“ nach „innen“ an die Unbekannte heran.

1.2 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung, in dem zusätzlich der Ausdruck „x^2“ vorkommt, heißt *quadratische Gleichung.*

Satz 1.3 (p-q-Formel)**.** *Die Gleichung*

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bemerkung. 1. Das Ziel bei quadratischen Gleichungen ist es, die Gleichung durch Umformungen auf die Form (1) zu bringen. Die Form (1) heißt auch *Normalform.*

2. Eine ähnliche Form ist auch als a-b-c-Formel oder „Mitternachtsformel“ bekannt: Für die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

wobei $a \neq 0$ sein muss. Die Form (1) erhält man, indem man diese Gleichung durch a teilt.

Bevor wir uns Beispiele für quadratische Gleichungen anschauen, wollen wir diese Formel herleiten (oder beweisen). Dazu ein kleiner Exkurs:

Satz 1.4 (Binomische Formeln)**.** *Seien a und b zwei Zahlen. Dann gelten die folgenden Formeln:*

- *(1. Binomische Formel)* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- *(2. Binomische Formel)* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- *(3. Binomische Formel)* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beweis. Wir leiten die erste Formel her. Die zweite und dritte können als Übungsaufgabe gelöst werden.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \overset{(*)}{=} a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) \overset{(*)}{=} a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

wobei in $(*)$ jeweils das Distributivgesetz benutzt wurde. □

Mit Hilfe der binomischen Formeln lassen sich bestimmte Rechnungen leichter im Kopf machen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 11^2 &= (10+1)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121 \\ 105^2 &= (100+5)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025 \\ 95^2 &= (100-5)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 5 + 5^2 = 10000 - 1000 + 25 = 9025 \\ 18 \cdot 22 &= (20-2)(20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396 \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Die binomischen Formeln sind auch nützlich, wenn wir einen Ausdruck der Form
$$a^2 \pm 2ab + b^2$$
haben. Dieser lässt sich dann „schöner“ als $(a \pm b)^2$ schreiben.
- Für die Herleitung benutzen wir nicht nur die Äquivalenzumformungen. Zusätzlich müssen wir auch noch die *Wurzel ziehen*. Bei dieser Umformung enstehen zwei Möglichkeiten, weil z.B. $2^2 = 4$, aber auch $(-2)^2 = 4$. Dafür schreiben wir $\pm$.

Beweis der p-q-Formel. Für die Herleitung der Formel benutzen wir die *quadratische Ergänzung*:

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot x + q = 0 && \text{quadratische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{passt für binom. Formel!}} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 && \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right. \\ \Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \text{|Wurzel ziehen} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && \text{Achtung: siehe Bemerkung.} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Wurzel ist (bei reellen Zahlen) nur für positive Zahlen definiert. Daher funktioniert die Rechnung oben nur, wenn

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

(„größer oder gleich Null“). Es kann also passieren, dass eine quadratische Gleichung gar keine Lösung besitzt! Wir unterscheiden drei Fälle:

- Es gibt zwei verschiedene Lösungen.
- Es gibt genau eine Lösung.
- Es gibt keine (reelle) Lösung.

Kommen wir zu einigen Beispielen.

Beispiel 1.5. *1.* $x^2 + 5x - 6$*:*

Mit der p-q-Formel erhalten wir

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-6)} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

also haben wir die Lösungen $x_1 = 1$ *und* $x_2 = -6$*.*

2. Manchmal muss man die Gleichung erst umformen, d.h. „auf die Normalform bringen". Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= -2 \qquad |+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 &= 0 \qquad |:2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm 0 = -1$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung!

3. $x^2 + 1$*:*

Lösungsformel:

$$x_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1}$$

Die Wurzel einer negativen Zahl (d.h. kleiner als Null) ist (für uns) nicht definiert. Daher hat diese Gleichung keine Lösung.

Auf Beispiel 2 lässt sich auch die erste binomische Formel anwenden.