ESTIMATIONS OPTIMALES POUR LE PROJECTEUR DE BERGMAN DANS LE DISQUE UNITÉ

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Master de Mathématiques

Option: Analyse

Par

FOGHEM GOUNOUE Guy Fabrice

Maître ès sciences

Matricule: 09V0236

Sous la direction de:

Dr. TCHOUNDJA Edgar

Chargé de cours, Université de Yaoundé I

Yaoundé, le 4 novembre 2016

♣ Dédicaces ♣

« *L'homme reconnaissant n'oubliera jamais la source qui lui a donné son eau pendant la saison sèche parceque le rivée*

Je dédie ce travail :

- À Monsieur TABUE Joseph, pour tous les efforts et les sacrifices que tu as consentis pour mes études.
- À mon feu père GOUNOUE Joseph.
- À ma feue mère KUISSEU Suzanne.
- À mon grand frère KAMDEM Hippolyte, pour ta générosité, ta solidarité, ton engagement et ta volonté.
- À ma sœur et mère TEUKAM Euphraxie.
- Au Seigneur notre DIEU qui par son immense bonté ne cesse de répondre aux appels de son peuple, en lui accordant sa grâce.

♣ Remerciements ♣

Je profite de l'occasion que me donne la présentation de ce travail pour adresser ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Docteur Edgar TCHOUNDJA à qui je dois le sujet de ce mémoire, pour sa disponibilité, sa patience et ses conseils éclairés qu'il m'a apportés d'un bout à l'autre de ce travail.

J'exprime également ma profonde gratitude au Professeur David BÉKOLLÉ, pour tous les efforts qu'il a consentis pour nous dispenser des cours d'analyse classique.

Je remercie tous les enseignants du département de Mathématiques pour leur dévouement pour une formation de qualité au sein du département. Je pense particulièrement aux professeurs Nobert NOUTCHEGUEME, François WAMON, Marcel DOSSA, Blaise TCHAPNDA et au Docteur Benoît SEHBA.

Je suis également reconnaissant envers SIMEN Nadine, MESSENG Salomé, KENGNE Gaelle et DONJIO Carnot pour leurs aides matérielles et morales.

Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance envers mes camarades ou amis TSOYI Léo, TEKEU Armand, BOGNI Thomas, NGONLA Laurence, BUZEKO Martial, DIEMO, patrique, TEUKAM Guy et Luther Mann pour leurs soutiens, collaborations et encouragements ; sans oublier MUKAM Arielle pour le soin et la gentillesse qu'elle a apporté dans la réalisation matérielle de ce mémoire.

Que toute personne qui de près ou de loin a contribué à la réalisation de ce travail par quelque moyen que ce soit, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

♣ Résumé ♣

Ce mémoire porte sur les estimations optimales pour le projecteur de Bergman dans le disque unité de $\mathbb{C}$. On note $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman à poids : c'est l'espace des fonctions analytiques qui sont dans $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Ici, $\alpha > -1$ et $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z)$ où $\mathrm{d}A(z)$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. Le projecteur de Bergman dans le disque unité est défini sur $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ par :

$$P_\alpha f(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \quad , \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dans ce mémoire, à travers les travaux de David Békollé et Aline Bonami en 1978 nous montrons que pour un poids ω, le projecteur de Bergman est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 < p < +\infty)$ (respectivement de type faible $(1,1)$ sur $L^1(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$) si et seulement si ω est dans la classe $(B_{p,\alpha})$ (respectivement $(B_{1,\alpha})$) de Békollé-Bonami. Ensuite, grâce aux travaux de Sandra Pott et Maria Carmen Reguera (2012) nous donnons une estimation optimale du projecteur de Bergman sur $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 < p < +\infty)$ suivant la caractéristique $B_{p,\alpha}(\omega)$ de Békollé-Bonami moyennant le modèle dyadique et une adaptation de la méthode de Cruz-Uribe, Martell et Pérez.

♣ Abstract ♣

This work focuses on the sharp estimates of the Bergman projection in the unit disk. We denote by $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ the weighted Bergman space on the unit disk of $\mathbb{C}$: it is the space of analytic function in $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Here, $\alpha > -1$ and $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z)$ where $\mathrm{d}A(z)$ is the normalized Lebesgue area measure on $\mathbb{D}$. The Bergman projection is defined on $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ by :

$$P_\alpha f(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \quad , \quad z \in \mathbb{D}.$$

In this thesis, from the work of David Békollé and Aline Bonami in 1978, we prove that given a weighted ω on $\mathbb{D}$, the Bergman projection is of type (p,p) on $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 < p < +\infty)$ (respectively of weak type $(1,1)$ on $L^1(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$) if and only if ω belong to $(B_{p,\alpha})$ class (respectively $(B_{1,\alpha})$ class) of Békollé-Bonami. Later, thanks to a work of Sandra Pott and Maria Carmen Reguera, we give sharp estimates for the Bergman projection on $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 < p < +\infty)$ in terms of Békollé-Bonami constant $B_{p,\alpha}(\omega)$ by the means of a dyadic Modèle approach and an adaptation of a method of Cruz-Uribe, Martell and Pérez.

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction ♣

On considére la mesure radiale définie par $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z)$, $z \in \mathbb{D}$, avec $-1 < \alpha < +\infty$ où $\mathrm{d}A(z)$ désigne la mesure standard de probabilité de Lebesgue sur $\mathbb{D}$. On définit l'espace $A^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ $(0 < p < +\infty)$ de Bergman comme étant l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω qui sont dans$L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. On note P_α le projecteur de Bergman définit par

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

C'est un opérateur intégral dont le noyau est défini par $K_\alpha(z,w) = (1-z\overline{w})^{-(2+\alpha)}$, $z, w \in \mathbb{D}$: C'est le noyau de Bergman. La recherche de la dualité sur les espaces $A^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ conduit au problème de continuité du projecteur de Bergman sur les espaces $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. De plus, on montre grâce à la théorie des intégrales singulières développée par Coifman et Weiss en 1971 [8] dans le cadre des espaces de natures homogènes que le projecteur de Bergman est une intégrale singulière. Plusieurs mathématiciens ce sont penchés sur le problème de continuité d'un opérateur d'intégrale singulière à cette époque. On peut citer : Muckenhoupt, Hunt et Wheeden [15], Coifman et Fefferman [9], Calderòn [6] etc... Le problème principal était celui de la caractérisation des fonctions posituves ω, localements intégrables sur un espace homogène (X, d, μ) pour lesquelles un opérateur d'intégrale singulière T est bornée sur $L^p(\omega \mathrm{d}\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\|Tf\|_{L^p(\omega \mathrm{d}\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}\mu)}. \tag{1}$$

Mais, plutôt, en 1972 Muckenhoupt [19] avait introduit une classe (A_p) dite de Muckenhoupt pour laquelle bon nombre de ces opérateurs en particulier ceux de la classe de Calderòn-Zygmund saisfaisaient l'inégalité (1) si et seulement si ω appartient à la classe (A_p) c'est-à-dire ω vérifie

$$A_p(\omega) = \sup_B \frac{|B|_\omega}{|B|} \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'}}}{|B|} \right)^{p-1} < +\infty. \tag{2}$$

Paradoxalement, pour la simple raison que le noyau de Bergman est de classe C^∞ sur $\mathbb{D}$ et n'est singulier qu'à la frontière de $\mathbb{D}$, l'appartenance d'un poids à la classe de Muckenhoupt est une condition suffisante pour avoir l'inégalité (1) et loin d'être nécessaire dans le cas du projecteur de Bergman P_α. Dès lors, l'étude de la continuité du projecteur de Bergman présente un intérêt certain ; vu qu'un résultat analogue à celui de Coifman et Fefferman fait en 1978 par David Békollé et Aline Bonami [5] s'étend au cas des mesures boréliennes (cas qui ne sera pas développé ici pour des raisons d'objectivités). Ce résultat sera généralisé en dimension supérieur dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par David Békollé [4]. Comme ses prédécesseurs, David Békollé va introduire l'espace homogène $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$ (que nous définirons ultérieurement) et une classe de mesures boreliennes notée $(B_{p,\alpha})$ $(1 \leq p < +\infty)$ dite de Békollé-Bonani. Puis, il enonce les résultats suivants :

- L'opérateur P_α s'étend en un opérateur continu sur $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ dans lui-même si et seulement si μ est dans la classe $(B_{p,\alpha})$.
- L'opérateur P_α s'étend en un opérateur faiblement continu sur $L^1(\mathbb{D}, \mathrm{d}\mu)$ si et seulement si μ est dans la classe $(B_{1,\alpha})$.

Dans le cas où μ est une mesure absolument continue par rapport à $\mathrm{d}A_\alpha$, si ω désigne la dérivée de Radon-Nikodym de μ $(\mu = \omega \mathrm{d}A_\alpha)$, pour ces deux résultats la nécessité de l'appartenance de $\mu = \omega \mathrm{d}A_\alpha$ à la classe $(B_{p,\alpha})$ $(1 \leq p < +\infty)$ se prouve à peu près comme l'ont fait Coifman et Fefferman [9] dans le cas de la transformation de Hilbert. Pour les réciproques, on procède par régularisation des poids de la classe $(B_{p,\alpha})$ de façon à obtenir des poids de Muckenhoupt ce qui permet d'utiliser à nouveau le résultat de Coifman et Fefferman. Pour la réciproque du premier résultat, on montre que pour la fonction maximal m_α définit par :

$$m_\alpha f(z) = \sup_{r \geq 1-|\xi|, \xi \in \mathbb{D}} \frac{1_{B(\xi,r)}(z)}{|B(\xi,r)|_\alpha} \int_{B(\xi,r)} |f| \mathrm{d}A_\alpha \tag{3}$$

on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|m_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &\leq C\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}; & (4) \\ \|P_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &\leq C\|m_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. & (5) \end{aligned}$$

Pour La réciproque du second résultat on montre que m_α est de type faible $(1,1)$ sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$; puis on utilise un découpage de type Calderòn-Zygmund.

Les harmoniciens font face à une frustration majeur car les techniques qu'ils utlisaient n'offraient pas une réelle visibilité sur la dépendance de la norme à poids de Muckenhoupt d'un opérateur d'intégrale singulière. Cette nouvelle préocupation va succiter de très belles pages d'analyse. C'est ainsi qu'en 2007 Petermichl [20] dans le cas de la transformation de Hilbert a prouvé l'estimation est optimale suivante :

$$\|Tf\|_{L^2(\omega)} \leq CA_2(\omega)\|f\|_{L^2(\omega)} \tag{6}$$

où la constante C est indépendante de ω. Ce résultat sera à l'origine de la conjecture A_p $(1 < p < +\infty)$ qui stipule, qu'une estimation optimale pour un opérateur de type Caldéròn-Zygmund T en fonction de la constante $A_p(\omega)$ est donnée par :

$$\|Tf\|_{L^p(\omega)} \leq C(T)A_p(\omega)^{\max(1, \frac{1}{p-1})}\|f\|_{L^p(\omega)}. \tag{7}$$

Où $C(T)$ est une constante qui dépend uniquement de T. La recherche d'une telle estimation n'est pas fortuite car, en 2001, Astala Iwaniec et Saksman [2] ont démontré que les résultats optimaux de régularité des solutions des EDP de Beltrami étaient vérifiées dès lors qu'on supposait que la norme d'opérateur de la transformation de Beurling-Ahlfors satisfaisait (7) pour $p \geq 2$. La conjecture A_p sera finalement démontrée en 2011 par Hytönen [16]. Suite à ce nouveau developpement de la conjecture A_p, une question intéressante serait celle de savoir s'il est possible de prolonger ce résultat à une sorte de conjecture $B_{p,\alpha}$ pour le projecteur de Bergman. Il s'agit aussi d'améliorer le résultat de Alexandru et Constantin [1] qui dans une tentative de résolution de la conjecture $B_{p,\alpha}$ ont réussi à contrôler la norme L^p à poids de Békollé-Bonami du projecteur de Bergman sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par la constante $B_{p,\alpha}^{\frac{5}{2}}(\omega)$. Mais, dans leur article [21] publié en 2013, Sandra pott et Maria Carmen Reguera ont prouvé grâce à la notion grille dyadique que l'opérateur de Bergman dans le disque unité satisfaisait à des estimations analogue à (6) données par :

$$\|P_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{8}$$

où $C_{p,\alpha}$ est une constante indépendante de ω. Elles prouvent (8) en transférant le problème dans le demi-plan complexe supérieur au moyen d'une bijection. Les grilles dyadiques permetent de définir les opérateurs dyadiques qui sont des opérateurs approchant le projecteur de Bergman indépendanment des poids ω de la classe $(B_{p,\alpha})$.

Notre mémoire, présente deux objectifs majeurs : nous devons caractériser la continuité L^p à poids pour le projecteur de Bergman dans le disque unité ; puis, mettre en exergue les travaux de Sandra pott et Maria Carmen Reguera c'est-à-dire prouver les estimations (8). Pour cela, nous adoptons le plan suivant :

- Au chapitre **un**, nous rappelons les notions qui seront utiles dans ce mémoire.
- Le chapitre **deux** est consacré aux espaces de Bergman dans le disque unité et à une présentation des poids de Békollé-Bonami.
- Le chapitre **trois** est consacré à la preuve du théorème de Békollé-Bonami.
- Enfin, au chapitre **quatre**, nous nous inspirerons du travail Sandra Pott et de Maria Carmen Reguera pour [21] pour prouver une nouvelle version de la preuve du théorème de Békollé-Bonami qui offre une estimation optimale du projecteur dans le cas où $1 < p < +\infty$.

Chapitre Un

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions utiles pour l'élaboration des résultats prévus dans le cadre de mémoire. Il s'agit principalement des éléments de la théorie d'intégration, d'analyse fonctionnelle linéaire, de variables complexes et ainsi que quelques résultats d'analyse harmonique.

1.1 Rappels sur la théorie d'intégration

Dans cette section on énonce quelques résultats de base de la théorie d'intégration qu'on utilisera. Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré. Cette partie est extraite de [3] et de [13].

Définition 1.1.1. Pour $0 < p < +\infty$, $L^p(X, \mu)$ désigne l'ensemble des (classes de) fonctions f μ-mesurables sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que que $|f|^p$ soit μ-intégrable.

$L^\infty(X, \mu)$ est l'ensemble des (classes de) fonctions f μ-mesurables sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles qu'il existe une constante $c > 0$ vérifiant $\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0$ ou encore
$|f| \leq c$ μ-presque partout.

Pour $0 < p < +\infty$ et $f \in L^p(X, \mu)$ on note

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $f \in L^\infty(X, \mu)$ on note

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \text{ess sup}\,|f| = \inf\{c > 0 : |f| \leq c\ ,\ \mu - p.p\}$$

Dans la suite, $L^p(X, \mu)$ sera noté simplement L^p et $\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \|f\|_p$ quand cela n'engendrera pas de confusion. Sauf mention contraire, lorsque $X = \mathbb{R}^n$, la mesure considérée sera la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1.1. Soient f et g deux fonctions mesurables sur X.

1) Si $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^{p'}(X, \mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors $fg \in L^1(X, \mu)$. De plus,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \qquad \text{(Inégalité de Hölder)}$$

2) Si $f, g \in L^p(X,\mu)$ alors on a :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad \text{(Inégalité de Minkowski)}$$

Théorème 1.1.2. (Convergence monotone de Beppo-Levi)
Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives et μ-intégrables. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

De plus, si $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n \mathrm{d}\mu < +\infty$ alors $\{f_n\}_n$ converge simplement μ-presque partout vers $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et f est μ-intégrable .

Théorème 1.1.3. (Convergence dominée de Lebesgue)
Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p avec $1 \leq p \leq +\infty$ qui converge simplement μ-presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive $g \in L^p$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $|f_n| \leq g$ μ-presque partout. Alors $f \in L^p$ et $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Dans le cas $p = 1$ on a tout simplement $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$.

Théorème 1.1.4. (Continuité sous le signe somme)
Soit $f : X \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, où E est un espace métrique. Si on pose

$$\phi(t) = \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$$

et on suppose que :

(1) Pour tout $t \in E$, $f(\cdot,t)$ est μ-intégrable sur X ;

(2) Pour presque tout $x \in X$, $f(x,\cdot)$ est continue sur E ;

(3) Pour tout $t_0 \in E$, il existe V, un ouvert de t_0 contenu dans E et il existe g, une fonction μ-intégrable sur X ne dépendant que de la variable x vérifiant : pour tout $t \in V$, $|f(\cdot,t)| \leq g$ μ-presque partout.

Alors la fonction ϕ est continue sur E.

Théorème 1.1.5. (Riesz-Fisher)
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.1.6. (Réciproque du théorème de la convergence dominée de Lebesgue)
Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de L^p qui converge dans L^p vers $f \in L^p$ (c'est-à-dire $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$) alors on peut extraire de la suite $\{f_n\}_n$ une sous-suite $\{f_{n_k}\}_k$ et on peut trouver une fonction $g \in L^p$ telles que la suite $\{f_{n_k}\}_k$ converge simplement vers f μ-presque partout et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}| \leq g$ μ-presque partout.

Proposition 1.1.1. Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert alors $L^p(\Omega,\mu)$ est un espace séparable.

Théorème 1.1.7. (Fubini)

(1) Soient $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{1\leq i\leq k}$ k espaces mesurés σ-finis, soit
$f : (X_1 \times \cdots \times X_k, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)\right)$. Soit μ la mesure produit sur $(X_1 \times \cdots \times X_k, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k)$. Pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$, on a l'égalité :

$$\int_{X_1\times\cdots\times X_k} f \mathrm{d}\mu = \int_{X_{\sigma(1)}} \cdots \int_{X_{\sigma(k)}} f(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{d}\mu_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \ldots \mathrm{d}\mu_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}).$$

(2) Si la fonction f est mesurable et de signe quelconque, alors le résultat ci-dessus reste valide à condition que l'on ait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\int_{X_1\times\cdots\times X_k} |f| \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Théorème 1.1.8. (Représentation de Riesz pour les espaces L^p)
Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual topologique $(L^p)'$ de L^p est isométrique à l'espace $L^{p'}$, où p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Plus précisement, pour $T \in (L^p)'$, il existe une fonction $g \in L^{p'}$ telle que pour tout $f \in L^p$ on a :

$$Tf = \langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} \mathrm{d}\mu.$$

De plus, par dualité, on a : $\|T\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}} = \sup\limits_{\|f\|_{L^p}=1} \left|\int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu\right|$. Ainsi on identifie $(L^p)'$ à $L^{p'}$ grâce à l'isomorphisme isométrique :

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : \ L^{p'} &\longrightarrow (L^p)' \\ g &\longmapsto \langle\cdot, g\rangle : L^p \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad\quad f \longmapsto \langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.9. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini (c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{X_n\}_n$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ vérifiant $X = \bigcup\limits_n X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$). Si f est une fonction mesurable telle que pour toute fonction g mesurable positive on a $\int_X fg\mathrm{d}\mu \geq 0$ alors $f \geq 0$ μ-presque partout.

Définition 1.1.2. Sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, une mesure ν est dite absolument continue par rapport à une autre mesure μ (on note $\nu \ll \mu$) lorsque pour tout
$A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

Théorème 1.1.10. (Décomposition de Radon-Nikodym)
Soient ν et μ deux mesures positives sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. alors ν se décompose de manière unique sous la forme $\nu = \nu_a + \nu_s$, où $\nu_a \ll \mu$ et ν_s est singulière par rapport à μ (c'est-à-dire il existe $A, B \in \mathcal{A}$ disjoints tels que $\nu_s(A) = \nu_s(X)$ et $\mu(B) = \mu(X)$. De plus, il existe une fonction f mesurable positive, telle que $\nu_a = f\mu$ $\left(\nu_a(A) = \int_X 1_A f\mathrm{d}\mu\right)$. On dit que f est la dérivée de Radon de ν par rapport à μ.

Corollaire 1.1.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, alors les mesures absolument continues par rapport à μ sont sous la forme $\nu = f\mu$ où f est une fonction mesurable positive.

1.2 Espaces L^p-faible et interpolation de Marcinkiewicz

Avant d'énoncer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz dans les espaces L^p, nous rappelons sommairement les définitions et quelques propriétés des espaces L^p-faible ; confère [13, Pages, 31-34].

Définition 1.2.1. Soit $0 < p < +\infty$. On désigne par $L^p(X, \mu)$-faible, noté $L^{p,\infty}(X, \mu)$, l'ensemble de toutes les classes de fonctions μ-mesurables sur X telles que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,\infty}} &= \inf\left\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{c^p}{\alpha^p}, \forall \alpha > 0\right\} < +\infty \\ &= \sup\left\{\alpha\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right)^{\frac{1}{p}}, \alpha > 0\right\}. \end{aligned}$$

L'espace L^∞-faible est par définition l'espace L^∞.

Définition 1.2.2. Soient $1 \leq p, p' \leq +\infty$ et $T : L^p \longrightarrow L^{p'}$ une application. On dit que T est de type (fort) (p, p') ou bien que T est bornée de L^p dans $L^{p'}$ s'il existe une constante $A_{p,p'} \geq 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^p$, $\|Tf\|_{p'} \leq A_{p,p'}\|f\|_p$. Par conséquent lorsque T est linéaire cela entraîne la continuité de T.
On dit que T est de type faible (p, p') avec $1 \leq p' < +\infty$ (resp de type faible (p, ∞)) s'il existe une constante $A_{p,p'} \geq 0$ (resp $A_p \geq 0$) telle que pour toute fonction $f \in L^p$,
$\|Tf\|_{L^{p',\infty}} \leq A_{p,p'}\|f\|_{L^p}$ c'est-à-dire

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{A_{p,p'}\|f\|_p}{\alpha}\right)^{p'} \text{ quelque soit } \alpha > 0$$

$$(\text{resp } \|Tf\|_\infty \leq A_p\|f\|_p \text{ (c'est-à-dire } T \text{ est de type } (p, \infty))).$$

Dans ces conditions, lorsque T est linéaire on dit que T est faiblement continue de L^p dans $L^{p'}$ pour dire que T est de type faible (p, p').

Remarque 1.2.1. Si T est de type (p, p') alors T est de type faible (p, p'), la réciproque n'étant pas vraie. Cependant, le théorème d'interpolation dû à Marcinkiewicz est le plus souvent utilisé lorsqu'on désire montrer qu'un opérateur sous-additif est borné de L^p dans $L^{p'}$ sachant qu'il vérifie des estimations de type faible. Il s'énonce comme suit :

Théorème 1.2.1. (Interpolation de Marcinkiewicz)
Soient p_0 et p_1 deux éléments de $[1, +\infty]$ tels que $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$. Soit T une application sous-additive définie sur $L^{p_0} + L^{p_1}$ à valeurs dans l'espace des fonctions mesurables sur X, c'est-à-dire $|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg|$ pour toutes fonctions f et g appartenant à $L^{p_0} + L^{p_1}$. On suppose que T est simultanément de type faible (p_0, p_0) et de type faible (p_1, p_1). Alors pour tout $0 < t < 1, T$ est de type (p_t, p_t) où

$$\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_0} + \frac{1-t}{p_1}$$

De plus, lorsque $p_1 < +\infty$,

$$A_{p_t,p_t} = 2\left[p_t\left(\frac{(A_{p_0,p_0})^{p_0}}{p_t - p_0} + \frac{(A_{p_1,p_1})^{p_1}}{p_1 - p_t}\right)\right]^{\frac{1}{p_t}}$$

convient alors pour avoir $\|Tf\|_{p_t} \leq A_{p_t,p_t}\|f\|_{p_t}$ pour tout $f \in L^{p_t}$.
Si $p_1 = +\infty$, on peut prendre

$$A_{p_t,p_t} = 2\left[p_t\frac{(A_{p_0,p_0})^{p_0}}{p_t - p_0}\right]^{\frac{1}{p_t}} .$$

1.3 Rappels d'analyse fonctionnelle et linéaire

Les différents résultats de section peuvent être retrouver dans [7, 3].

Théorème 1.3.1. (Graphe fermé)
Une application linéaire f entre deux espaces de Banach E et F est continu si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_n$ d'éléments de E telle que $x_n \longrightarrow 0$ (dans E) et $f(x_n) \longrightarrow y$ (dans F) quand $n \longrightarrow +\infty$ alors $y = 0$.

1.3.1 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On rappelle qu'un produit scalaire sur H est une forme hermitienne sur H qui est définie positive. Nous noterons $\langle , \rangle$ pour désigner un produit scalaire sur H. Plus précisement, pour $x, y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

(1) $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$;

(2) $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle x, z\rangle$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (On dit que $\langle , \rangle$ est définie positive).

De plus, l'application définie sur H par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in H$ est une norme sur H. C'est la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.

Définition 1.3.1. Un espace préhilbertien est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. On notera $(H, \langle , \rangle)$ ou simplement H.
Si en plus H est complet pour la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$, alors on dit que $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.3.2. Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$. Et si A est une partie non vide de H, alors on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble défini par : $A^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in A\}$.

Théorème 1.3.2. (Projection orthogonale)
Soit H un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace de Hilbert (ou encore un sous-espace fermé) de H. Alors, pour tout x appartenant à H, il existe un unique élément noté $P_F x$ appartenant à F vérifiant :

$$\|x - P_F x\| = d(x, F) = \inf\{\|x - z\|, z \in F\}. \tag{1.1}$$

De plus, $P_F x$ est l'unique élément de F tel que $x - P_F x$ soit dans l'orthogonal de F : c'est le projeté orthogonal de x sur F.

L'application notée P_F définie de H dans F qui à x associe $P_F x$ est la projection orthogonale de H sur F.

Remarque 1.3.1. La relation (1.1) reste valide lorsque H est seulement préhilbertien et F une partie non vide de H, convexe et qui est un espace métrique complet pour la distance induite par la norme associée au produit scalaire de H.

Proposition 1.3.1. Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H.

(1) Pour x et y dans H, on a : $\|P_F x - P_F y\| \leq \|x - y\|$ (Cette inégalité reste vraie lorsque F est un convexe fermé et non vide de H).

(2) Lorsque $F \neq \{0\}$, P_F est un opérateur linéaire continue de norme 1.

(3) Pour x et y dans H, on a : $\langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle$.

(4) $P_F \circ P_F = P_F$.

(5) $\operatorname{Im} P_F = F$, $\ker P_F = P_F^{-1}\{0\} = F^\perp$ et $H = F \oplus F^\perp$.

(6) $P_{F^\perp} = \mathrm{Id}_H - P_F$.

Théorème 1.3.3. (Théorème de représentation de Riesz)
Soit H un espace de Hilbert et soit φ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur a dans H tel que pour tout $x \in H, \varphi(x) = \langle x, a\rangle$ et $\|\varphi\| = \|a\|$.

1.3.2 Bases hilbertiennes

Définition 1.3.3. Soit H un espace préhilbertien et soit I un ensemble non vide d'indices. On dit que la famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de H est orthogonale si on a : $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour $i, j \in I,\ i \neq j$.
De plus, si $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$, c'est-à-dire $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ alors on dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée ou orthonormale.

Théorème 1.3.4. (Théorème de Pythagore généralisé)
Soient H un espace de Hilbert et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'éléments de H. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge dans H si et seulement si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2$ converge. Dans ce cas, on a la relation de Pythagore généralisée

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

Théorème 1.3.5. Soit H un espace de Hilbert, soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée d'éléments de H et soit F le sous-espace de Hilbert qu'elle engendre, c'est-à-dire que F est l'adhérence dans H du sous-espace engendré par la suite $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

(1) Pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente et sa somme est égale à $P_F x$ et on a l'inégalité de Bessel :

$$\|P_F x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(2) Quelque soient x et y dans H, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$ est absolument convergente et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle} = \langle P_F x, P_F y\rangle.$$

Définition 1.3.4. Soit H un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de H toute famille $\{e_i\}_{i\in I}$ orthonormée de H qui est totale c'est-à-dire que le sous-espace engendré par $\{e_i\}_{i\in I}$ est dense dans H.

Théorème 1.3.6. (Théorème des bases hilbertiennes)
Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée d'un espace de Hilbert H. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

(2) Tout élément x dans H s'écrit sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.

(3) Quels que soient x et y dans H, on a : $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$.

(4) Pour tout x dans H on a l'identité de Parseval-Bessel :
$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Théorème 1.3.7. Tout espace de Hilbert séparable (c'est-à-dire qui contient une partie dénombrable qui est totale) possède une base hilbertienne.

1.3.3 Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Définition 1.3.5. Soit H un espace préhilbertien et soit u un opérateur dans H. On appelle opérateur adjoint de u un opérateur noté u^* qui est tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$, pour $x, y \in H$.
Lorsque $u = u^*$, on dit que u est un opérateur auto-adjoint.

Proposition 1.3.2. (1) L'adjoint d'un opérateur s'il existe, est unique.

(2) Si H est un espace de Hilbert, alors tout opérateur continu sur H possède un unique adjoint.

(3) $(u^*)^* = u$; $(u+v)^* = u^* + v^*$; $(\alpha u)^* = \overline{\alpha}u^*$; $(u\circ v)^* = v^*\circ u^*$.

(4) Si u est inversible alors u^* est aussi inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

(5) Lorsque u est continue, alors u^* l'est aussi et on a $\|u\| = \|u^*\|$.

1.4 Quelques résultats de variables complexes

Cette section est un extrait du livre [22].

1.4.1 Holomorphie et analyticité

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note par :

$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r.

$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon r.

$\mathcal{C}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r.

Définition 1.4.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe (dérivable au sens complexe) en un point a de Ω si la limite de $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe quand z tend vers a. Cette limite est alors appelée la dérivée de f en a et est notée $f'(a)$. On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $H(\Omega)$.

Définition 1.4.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction d'une variable complexe. On dit que f est analytique en a de Ω s'il existe $r > 0$ tel que le disque $\overline{D}(a,r)$ est contenu dans Ω et si on peut trouver une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(a,r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

On dit que f est analytique sur Ω si elle est analytique en tout point de Ω.

On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Proposition 1.4.1. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $A(\Omega) = H(\Omega)$.

Théorème 1.4.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique de Ω dans $\mathbb{C}$ qui est continue. Les propiétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout disque $\overline{D}(a,r)$ contenu dans Ω, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t. \qquad \text{(Formule de la moyenne)}$$

(2) Pour tout disque $\overline{D}(a,r)$ contenu dans Ω, on a :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(x+iy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \text{(Formule de la moyenne planaire)}$$

Proposition 1.4.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé contenu dans Ω. Si le développement de f en série entière au voisinage de a est $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Corollaire 1.4.1. (Inégalités de Cauchy)

Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a,r)$. Alors les coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ du développement en série entière de f en a vérifient :

$$|a_n| \leq M(r)r^{-n} \quad , \text{ où } \quad M(r) = \sup_{z\in\overline{D}(a,r)} |f(z)|.$$

Théorème 1.4.2. (Weierstrass)
Soit $\{f_n\}_n$ une suite d'éléments de $H(\Omega)$ qui converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$ contenu dans Ω, alors $f \in H(\Omega)$. En outre, quelque soit k entier naturel, la suite $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ contenu dans Ω vers $f^{(k)}$.

1.4.2 Fonctions Gamma et Bêta

Définition 1.4.3. [13, Pages,416-424]

(1) On appelle « fonction Gamma » la fonction définie pour $x \in]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

(2) On appelle « fonction Bêta » la fonction définie pour un couple $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t.$$

Propriété 1.4.1. (1) Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

(2) Pour tout $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

(3) Pour tout $x \in]0, 1[, \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

(4) Pour tout couple $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(5) On a l'équivalence : $\Gamma(x+1) \simeq \sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^x$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ (Formule de Stirling).

(6) Pour $|x| < 1$ et $\lambda > 0$ on a :

$$(1-x)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} x^n .$$

Preuve. (5)Nous allons juste prouver la formule de Stirling. En effectuant successivement les changements de variables $t = x + sx\sqrt{\frac{2}{x}}$ et $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ l'on vérifie que :

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2x} \int_{-y}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{s}{y}\right)^{2y}}{e^{2sy}} ds \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2x}} = \int_{\mathbb{R}} f(y, s) ds.$$

Où $f(y, s) = \left(\frac{1+\frac{s}{y}}{e^s}\right)^{2y} 1_{[-y,+\infty[}(s)$. L'on vérifie aisément les inégalités suivantes :

$$|f(y, s)| \leq \begin{cases} (1+s)^2 e^{-s} & \text{si } s \geq 0 \\ e^{-s^2} & \text{si } \quad -y \leq s \leq 0 \end{cases} \leq g(s) := (1+s)^2 e^{-s} 1_{\{t\leq 0\}}(s) + e^{-s^2} 1_{\{t\geq 0\}}(s).$$

La fonction $s \mapsto g(s)$ est intégrable et $f(y, s) \to e^{-s^2}$ lorsque $y \mapsto +\infty$. Le Théorème de la convergence dominée donne le résultat escompter comme suit :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2x}} \overset{y=\frac{x}{2}}{=} \lim_{y\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y, s) ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

1.5 Rappels d'analyse harmonique

1.5.1 Espaces de nature homogène

Définition 1.5.1. [8] On appelle pseudo-distance sur un ensemble non vide X toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) Il existe une constante positive δ_1 ($\delta_1 \geq 1$) telle que pour tous $x, y, z \in X$,

$$d(x, z) \leq \delta_1 \left(d(x, y) + d(y, z)\right).$$

Pour $x \in X$ et $r > 0$, l'ensemble $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ est appelé pseudo-boule ouverte de centre x et de rayon r. Les pseudo-boules ouvertes centrées en x satisfont aux axiomes d'une base de voisinage de x.

Définition 1.5.2. Soit d une pseudo-distance sur X. Une mesure borélienne positive μ (X étant supposé muni de la topologie associée à d) est dite homogène ou doublante s'il existe une constante δ_2 positive telle que quels que soient $x \in X$ et $r > 0$ on ait

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \delta_2 \mu(B(x, r)) < +\infty.$$

On dit alors que le triplet (X, d, μ) est un espace de nature homogène ou tout simplement un espace homogène.

1.5.2 Quelques rappels de la théorie des intégrales singulières

Lemme 1.5.1. (Lemme de recouvrement de Vitali)
Soit (X, d, μ) un espace homogène et soit E un sous-ensemble mesurable de X qui est recouvert par la réunion d'une famille $\{B_j\}_{j\in J}$ de pseudo-boules ouvertes de diamètres uniformément bornés, c'est-à-dire il existe $C > 0$ tel que $\forall j \in J$, diam $B_j < C$. Alors on peut extraire de la famille $\{B_j\}_{j\in J}$ une sous-famille finie ou infinie de pseudo-boules $\{B_k\}_k$ deux à deux disjointes telles que pour une constante $\delta > 0$ ne dépendant que des constantes de X, la suite dilatée $\{\delta B_k\}_k$ recouvre E, où δB_k est une pseudo-boule de même centre que B_k et de rayon δ-fois plus grand.

Sur l'espace homogène (X, d, μ), soit f une fonction localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur les pseudo-boules. On définit la fonction maximale de f par :

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \mathrm{d}\mu(y).$$

Théorème 1.5.1. (Maximal de Hardy-Littlewood)[12]
Soit (X, d, μ) un espace homogène.Si M désigne l'opérateur maximal alors il existe une constante

$A_1 > 0$ indépandante de la mesure μ telle que pour tout $f \in L^1(X, \mu)$ et pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\mu(\{x \in X : Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{A_1}{\alpha}\|f\|_1.$$

C'est-à-dire que l'opérateur M est de type faible (1,1).

Définition 1.5.3. Soit (X, d, μ) un espace homogène. On dit qu'un noyau k est un a-noyau de Carderón-Zygmund pour la pseudo-distance d si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tous $x, y \in X$ on a : $|k(x,y)| \leq \dfrac{c_1}{(d(x,y))^a}$;

(2) Il existe des constantes δ, c_2 et c_3 telles que pour tous x, y et $y_0 \in X$ satisfaisant à l'inégalité $d(y, y_0) \leq c_3 d(x,y)$, on a :

$$|k(x,y) - k(x,y_0)| + |k(y,x) - k(y_0,x)| \leq c_2 \frac{d(y,y_0)^\delta}{d(x,y)^{a+\delta}} .$$

Si de plus, pour tous R_1 et R_2 avec $0 < R_1 < R_2$ et tout $x \in X$, on a :

$$\int_{R_1 < d(x,y) < R_2} k(x,y) \mathrm{d}\mu(y) = 0 \ ;$$

alors on dit que k est un noyau singulier.

L'un des théorèmes fondamentaux en théorie des intégrales singulières est le théorème de Coifman-Weiss qui s'énonce comme suit :

Théorème 1.5.2. (Coifman-Weiss)
Soit $k \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ le noyau d'un opérateur intégral T vérifiant :

(1) T est de type $(2,2)$ sur L^2.

(2) Il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tous $y, y_0 \in X$ on ait :

$$\int_{d(y,y_0) \leq c_1 d(x,y)} |k(x,y) - k(x,y_0)| \mathrm{d}\mu(x) < c_2 \ .$$

Alors pour tout $p, 1 \leq p \leq 2$, il existe une constante A_p dépendant seulement de c_1 et c_2 telle que pour tout $f \in L^2 \cap L^p$ on ait : $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ et pour $p = 1$, T est de type faible $(1,1)$.

Nous aurons aussi besoin du lemme de décomposition de Whitney extrait de l'ouvrage [5].

Lemme 1.5.2. (Décomposition de Whitney)
Soit (X, d, μ) un espace homogène. Soit O un ouvert strictement contenu dans X. Il existe deux constantes positives N ($N \in \mathbb{N}$) et δ ne dépendant que des constantes de X et une suite de pseudo-boules $B_j = B(x_j, r_j)$ telles que

(1) $O = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$;

(2) Un point de O ne peut appartenir à plus de N pseudo-boules B_j ;

(3) Les pseudo-boules δB_j rencontrent le complémentaire de O dans X.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

Espaces de Bergman dans le disque unité

Ce chapitre, au vu des objectifs à atteindre dans ce mémoire, est consacré à l'étude des espaces de Bergman à poids dans le disque unité $\mathbb{D}$ par rapport à la mesure $\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z)$ où $-1 < \alpha < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$ et $\mathrm{d}A$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. Ces espaces sont des espaces de Banach, résultat qu'on obtient ici comme une conséquence de l'estimation, valide sur les sous-ensembles compacts K de $\mathbb{D}$ et pour tout $f \in H(\mathbb{D})$:

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq C_{K,\alpha} \|f\|_{p,\alpha} \qquad \text{où} \qquad \|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{d}A_\alpha(z) \right)^{1/p}$$

et $C_{K,\alpha}$ est une constante positive ne dépendant que de K et α. Dans le cas $p = 2$, A^2_α est un espace de Hilbert à noyau reproduisant dont le noyau est donné par le noyau de Bergman que nous prendrons soin de définir. Nous parlerons aussi du projecteur noté P_α de Bergman à poids dans le disque unité qui n'est rien d'autre que la projection orthogonale de l'espace $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ sur le sous-espace A^2_α. Puis à la fin nous présentons les poids de Békollé Bonami. Il est important de mentionner que le choix de $\alpha > -1$ assure tout simplement que $A^p_\alpha \neq \{0\}$.

2.1 Définition et propriétés

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On dénote par

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1\} \text{ le disque ouvert de } \mathbb{C}$$

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \ \ |z| = 1\} \text{ le cercle unité de } \mathbb{C}$$

$$H(\mathbb{D}) \quad \text{est l'espace des fonctions holomorphes dans } \mathbb{D}.$$

On note $\mathrm{d}A$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. Plus précisement,

$$\mathrm{d}A(z) = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad \text{où} \quad z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Pour $-1 < \alpha < +\infty$, nous notons $\mathrm{d}A_\alpha$ la mesure absolument continue par rapport à la mesure $\mathrm{d}A$ définie par :

$$\mathrm{d}A_\alpha(z) := (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z) = \frac{(\alpha+1)}{\pi}(1-r^2)^\alpha r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Définition 2.1.1. Soient $0 < p \leq +\infty$ et $-1 < \alpha < +\infty$. On appelle espace de Bergman à poids (relativement à la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$) dans le disque unité que l'on note $A^p_\alpha = A^p_\alpha(\mathbb{D})$, l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ qui sont dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ c'est-à-dire :

- pour $0 < p < +\infty$
$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \quad \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{d}A_\alpha(z) < +\infty \right\};$$
- pour $p = +\infty$, on écrit $A^\infty_\alpha(\mathbb{D}) = H^\infty(\mathbb{D})$ qui est tout simplement le sous-espace de $H(\mathbb{D})$ formé des fonctions bornées sur $\mathbb{D}$.

Ainsi, pour $1 \leq p < +\infty$ et pour f élément de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ on note par

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{d}A_\alpha(z) \right)^{1/p}$$

la norme dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ et pour f appartenant à $L^\infty(\mathbb{D})$ on note par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\}.$$

Dans la suite, sauf mention contraire, on supposera que $-1 < \alpha < +\infty$ et $1 \leq p < +\infty$.

Lemme 2.1.1. Si K est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{D}$, n un entier naturel, alors il existe une constante strictement positive $C_{K,\alpha} = C(K, n, p, \alpha)$ ne dépendant que de K, n, p et α telle que pour tout f élément de A^p_α :

$$\sup_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq C_{K,\alpha} \|f\|_{p,\alpha}.$$

Preuve. K étant un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{D}$ alors nécessairement K ne rencontre pas la frontière $\mathbb{T}$ de $\mathbb{D}$. Par conséquent la distance entre K et $\mathbb{T}$ est non nulle. Si on considère $R = R(K)$ cette distance, alors $R = R(K) > 0$ et pour tout z dans K, le disque $D(z, R)$ est contenu dans $\mathbb{D}$. En effet, si $\xi \in D(z, R)$ et $\xi \notin \mathbb{D}$ alors $[z, \xi] \cap \mathbb{T} = \{e^{i\theta}\} \subset D(z, R)$. Donc, $|z - e^{i\theta}| < R = \inf\{|z - e^{i\theta}| : z \in K, e^{i\theta} \in \mathbb{T}\}$ ce qui est absurde. Soient z appartenant à K, f un élément de A^p_α et $0 < r < R$. D'après la Proposition 1.4.2 on a :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \mathrm{d}\theta. \tag{2.1}$$

En multipliant les deux membres de (2.1) par la mesure $\frac{(\alpha+1)}{\pi}(1-r^2)^\alpha r\mathrm{d}r$ puis en intégrant sur $[0, R]$ on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{\displaystyle\int_{D(z,R)} |w-z|^n \mathrm{d}A_\alpha(w)} \int_{D(z,R)} f(w) \frac{|w-z|^n}{(w-z)^n} \mathrm{d}A_\alpha(w). \tag{2.2}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au membre de droit de (2.2), on a

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z)\right| &\leq \frac{n!}{\displaystyle\int_{D(z,R)} |w-z|^n \mathrm{d}A_\alpha(w)} \left(\int_{D(z,R)} |f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{D(z,R)} \mathrm{d}A_\alpha(w)\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{n! A_\alpha\left(D(z,R)\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\displaystyle\int_{D(z,R)} |w-z|^n \mathrm{d}A_\alpha(w)} \|f\|_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Mais, du théorème de la continuité de Lebesgue (Théorème 1.1.4), on remarque que l'application qui à z associe $\dfrac{n! A_\alpha\left(D(z,R)\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\displaystyle\int_{D(z,R)} |w-z|^n \mathrm{d}A_\alpha(w)}$ est continue sur le compact K comme rapport de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annulle pas. Alors en prenant

$$C_{K,\alpha} = \sup_{z\in K} \frac{n! A_\alpha\left(D(z,R)\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\displaystyle\int_{D(z,R)} |w-z|^n \mathrm{d}A_\alpha(w)} \;,$$

on aboutit à l'inégalité

$$\sup_{z\in K} |f^{(n)}(z)| \leq C_{K,\alpha} \|f\|_{p,\alpha}.$$

■

Remarque 2.1.1. Pour $n = 0$ la relation (2.2) s'écrit :

$$f(z) = \frac{1}{A_\alpha(D(z,R))} \int_{D(z,R)} f(w) \mathrm{d}A_\alpha(w) \tag{2.3}$$

qui est la formule de la moyenne planaire sur le disque $D(z,R)$.

Théorème 2.1.1. Pour tout $p \geq 1$, A^p_α est un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Preuve. Soit $\{f_n\}_n$ une suite d'éléments de A^p_α qui converge dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ vers un élément f. D'après le Lemme 2.1.1, pour tout compact K de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{D}$ et pour deux entiers naturels n et m, on a :

$$\sup_{z\in K} |(f_n - f_m)(z)| \leq C_{K,\alpha} \|f_n - f_m\|_{p,\alpha}.$$

Cette estimation montre que la convergence de la suite $\{f_n\}_n$ dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ entraîne qu'elle est uniformément de Cauchy sur K. Ainsi, la suite $\{f_n\}_n$ converge uniformément sur tout compact K de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{D}$ vers une fonction g holomorphe sur $\mathbb{D}$. D'autre part, du fait que la suite $\{f_n\}_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$, en vertu du Théorème 1.1.6, on peut extraire de cette suite une sous-suite $\{f_{n_k}\}_k$ qui converge simplement vers f pour presque tout z dans $\mathbb{D}$. L'unicité de la limite entraîne que $f = g$ presque partout sur $\mathbb{D}$. L'analyticité de g entraîne que $f = g$ sur $\mathbb{D}$.
Ainsi, f est un élément de A^p_α, ce qui prouve que A^p_α est fermé dans $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. De plus, il est facile de vérifier que A^p_α est un sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. ■

Corollaire 2.1.1. Pour $p \geq 1$ A^p_α est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.
Dans le cas $p = 2$, c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Remarque 2.1.2. (1) Pour $p = +\infty$, l'espace A^p_α est tout simplement réduit à $H^\infty(\mathbb{D})$ qui est le sous-espace des fonctions bornées de $H(\mathbb{D})$. Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $H^\infty(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{D})$ et donc aussi un espace de Banach.

(2) A^p_α étant un sous-espace fermé dans l'espace $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ qui est séparable, alors A^p_α est aussi séparable.

Proposition 2.1.1. Lorsque $\alpha \leq -1$ on que $A^p_\alpha(\mathbb{D}) = \{0\}$.

Preuve. Supposons fonction $f \neq 0$ telle que $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ alors 0 est zéro un isolé de f. Donc, la factorisation implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) = z^m g(z)$ où g est une fonction $g \in H(\mathbb{D})$, $g(0) \neq 0$. Nous affirmons que $g \in A^p_\alpha$. En effet, il est évident que $|g|^p$ est intégrable sur le compact $\overline{D}(0, 1/2)$ ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p dA_\alpha(z) &= \int_{D(0,1/2)} |g(z)|^p dA_\alpha(z) + \int_{1/2\leq|z|\leq 1} |g(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&= \int_{D(0,1/2)} |g(z)|^p dA_\alpha(z) + \int_{1/2\leq|z|\leq 1} |z|^{-mp} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&\leq \int_{D(0,1/2)} |g(z)|^p dA_\alpha(z) + \|f\|_{p,\alpha} (1/2)^{-mp} < +\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent $g \in A^p_\alpha$ et $g(0) \neq 0$. Par ailleurs comme g est holomorphe sur $\mathbb{D}$ la propriété de la moyenne planaire mentionnée dans la relation (2.3) et l'inégalité de Hölder entraînent que tout $r < 1$ on a

$$\begin{aligned}
|g(0)| &= \frac{1}{|D(0,r)|_\alpha} \left| \int_{D(0,r)} g(z) dA_\alpha(z) \right| \\
&\leq |D(0,r)|_\alpha^{-1/p} \|g\|_{p,\alpha}
\end{aligned}$$

Compte tenus du fait que $dA_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \rho (1-\rho^2)^\alpha d\rho d\theta$ et en raison du fait $\alpha \leq -1$ on vérifie que

$$|D(0,r)|_\alpha^{-1/p} = \pi \left(1 - (1-r^2)^{\alpha+1}\right)^{-1/p} \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad r \mapsto 1^-.$$

Donc, $|g(0)| = 0$ ce qui contredit le fait que $0 g(0) \neq 0$ nécessairement on a $f = 0$ et on a le résultat escompter. ∎

Dans certaines applications, on a souvent besoin d'approximer les fonctions de A^p_α par de bonnes fonctions. Le résultat qui suit nous offre deux possibilités pour le faire.

Proposition 2.1.2. Soient f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $0 < r < 1$. On définit la fonction f_r par $f_r(z) = f(rz)$ (f_r est définie sur le disque $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$). Soit $1 \leq p < +\infty$.

(1) Pour tout f dans A^p_α,

$$\|f_r - f\|_{p,\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \longrightarrow 1^-. \tag{2.4}$$

(2) Pour tout f dans A^p_α , il existe une suite $\{P_n\}_n$ de polynômes holomorphes telle que

$$\|P_n - f\|_{p,\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{2.5}$$

Ce qui montre que l'ensemble des polynômes holomorphes est dense dans A^p_α.

Preuve. (1) Soit f appartenant à A^p_α. Soient $0 < r, \delta < 1$. Pour tout w dans $\mathbb{D}$, on a : $\chi_{\delta\mathbb{D}}(w)|f(w)|^p \leq |f(w)|^p$ et $\chi_{\delta\mathbb{D}}(w)|f(w)|^p \longrightarrow |f(w)|^p$ lorsque $\delta \longrightarrow 1^-$ où $\chi_{\delta\mathbb{D}}$ désigne la fonction caractéristique de $\delta\mathbb{D}$. En appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 1^-}\int_{\delta\mathbb{D}}|f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w) &= \lim_{\delta\to 1^-}\int_{\mathbb{D}}\chi_{\delta\mathbb{D}}|f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}}|f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w).\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\delta\to 1^-}\int_{\delta<|w|<1}|f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w) = 0.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta_0 < 1$ tel que

$$\int_{\delta_0<|w|<1}|f_r(w) - f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{2.6}$$

La fonction $f_r - f$ étant continue sur le compact $\overline{D}(0, \delta_0)$, elle y est bornée. De plus, pour tout $w \in \overline{D}(0, \delta_0)$,

$$|f_r(w) - f(w)| \leq 2 \sup_{z\in D(0,\delta_0)} |f(z)| \quad \text{et} \quad f_r(w) \longrightarrow f(w) \quad \text{quand } r \longrightarrow 1^-.$$

En utilisant de nouveau le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\overline{D}(0,\delta_0)}|f_r(w) - f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w) = 0.$$

Ainsi, il existe $0 < r_0 < 1$ tel que pour tout $r_0 < r < 1$

$$\int_{D(0,\delta_0)}|f_r(w) - f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{2.7}$$

Soit $r_0 < r < 1$. De (2.6) et (2.7), on a

$$\begin{aligned}\|f_r - f\|_{p,\alpha} \leq\ & \left(\int_{0<|w|<\delta_0}|f_r(w) - f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w)\right)^{\frac{1}{p}} + \\ & \left(\int_{\delta_0<|w|<1}|f_r(w) - f(w)|^p \mathrm{d}A_\alpha(w)\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow 1^-$.

(2) Soit f un élément de A^p_α. Soit $\varepsilon > 0$. Alors d'après (2.4) on peut trouver $r \in]0, 1[$ tel que

$$\|f_r - f\|_{p,\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Comme f_r est holomorphe sur $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$, alors on peut écrire :

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{f_r^{(n)}(0)}{n!}.$$

Si on considère $\{P_n\}_n$ la suite des sommes partielles de cette série alors, des inégalités de Cauchy,(voir Corollaire 1.4.1) elle converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$ vers f_r, puisque $\overline{\mathbb{D}}$ est un compact contenu dans $D\left(0,\frac{1}{r}\right)$. Ainsi, il existe un rang à partir duquel on a :

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|P_n(z)-f_r(z)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Par conséquent, de (2.8) et (2.9), pour n assez grand, on a :

$$\|P_n-f\|_{p,\alpha}\leq\|P_n-f_r\|_{p,\alpha}+\|f_r-f\|_{p,\alpha}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

puisque (2.8) entraîne que

$$\left(\int_{\mathbb{D}}|f_r(z)-P_n(z)|^p\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\sup_{z\in\mathbb{D}}|P_n(z)-f_r(z)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

■

Intéressons-nous à présent à la structure hilbertienne de l'espace A^2_α. On rappelle que le produit scalaire de A^2_α est défini pour deux éléments f et g de A^2_α par :

$$\langle f,g\rangle_\alpha=\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z).$$

Notons aussi que A^2_α étant un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A\alpha)$ qui est séparable. Il suit donc que l'espace A^2_α est aussi séparable. En vertu de la Proposition 1.1.1, il en découle que A^2_α possède une base hilbertienne dénombrable. La Proposition ci-après nous en donne un exemple pour cet espace.

Proposition 2.1.3. La famille $\{e_n\}_n$ d'éléments de $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)$, définie pour $z\in\mathbb{D}$ et un entier naturel n par :

$$e_n(z):=\sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n$$

est une base hilbertienne de A^2_α.

Preuve : Chaque e_n est un monôme holomorphe et donc la famille $\{e_n\}_n$ est contenue dans A^2_α. Soient n et m deux entiers naturels. Le passage en coordonnées polaires entraîne :

$$\begin{aligned}\langle z^n,z^m\rangle_\alpha &= \frac{(\alpha+1)}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 r^{n+m+1}(1-r^2)^\alpha\mathrm{d}r\right)\\ &= \begin{cases}(\alpha+1)\beta(n+1,\alpha+1) & \text{si} \quad n=m\\ 0 & \text{si} \quad n\neq m\end{cases}\end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient en effectuant le changement de variables $\rho=r^2$. Mais,

$$(\alpha+1)\beta(n+1,\alpha+1)=\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}\ .$$

Ainsi, $\langle e_n,e_m\rangle_\alpha=\delta_{n,m}$ (où $\delta_{n,m}$ désigne le symbole de Kronecker de n et m). Il en résulte que la famille $\{e_n\}_n$ est un système orthonormé de A^2_α. Si f est un élément de A^2_α alors l'analyticité de f entraîne que pour $z \in \mathbb{D}$ on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{ou} \quad f(z) = \sum b_n e_n(z) \quad \text{avec} \quad b_n = \sqrt{\frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}} a_n.$$

Il est important de signaler que la convergence de la série de fonctions ci-dessus est uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$. Si on considère $\{f_n\}_n$ la suite des sommes partielles de cette série de fonctions alors, la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$ entraîne que :

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{2,\alpha} &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)|^2 \mathrm{d}A_\alpha(z) = \lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{n} b_m e_m \right\|^2_{2,\alpha} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n} |b_m|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2$ est convergente. De plus, la quantité $\|f_n - f\|^2_{2,\alpha}$ est le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2$. D'où $\|f_n - f\|^2_{2,\alpha} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Ce qui prouve la densité du sous-espace engendré par la famille $\{e_n\}_n$. On en déduit que la famille $\{e_n\}_n$ est une base hilbertienne de A^2_α. ■

Proposition 2.1.4. Pour tous $1 \leq p, q < +\infty$ tels que $q < p$ on a : $A^p_\alpha \subset A^q_\alpha$,

Preuve. Soit f un élément de A^p_α. En remarquant que la mesure de $\mathbb{D}$ vaut $A_\alpha(\mathbb{D}) = 1$ et $\dfrac{p}{q} > 1$, par application de l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \mathrm{d}A_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} (|f(z)|^p)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}A_\alpha(z) \leq \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \mathrm{d}A_\alpha(z) \right)^{q/p} = \|f\|^q_{p,\alpha}.$$

Ce qui prouve que f appartient à A^q_α et on a même $\|f\|_{q,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$.

■

2.2 Noyau de Bergman

Proposition 2.2.1. Soit z un élément fixé de $\mathbb{D}$. Si on considère la forme linéaire ϕ_z qui à une fonction $f \in A^2_\alpha$ associe $f(z)$, alors ϕ_z est continue sur A^2_α et il existe un unique k^α_z appartenant à A^2_α tel que $f(z) = \langle f, k^\alpha_z \rangle_\alpha$ pour tout $f \in A^2_\alpha$.

Preuve. En considérant le compact $K = \{z\}$, par application du Lemme 2.1.1 il suit immédiatement que $|\phi_z(f)| = |f(z)| \leq C_{K,\alpha} \|f\|_{2,\alpha}$ pour tout f appartenant à A^2_α. Ce qui prouve la continuité de ϕ_z. L'existence et l'unicité de k^α_z découle du théorème de représentation de Riesz. ■

Définition 2.2.1. On appelle noyau de Bergman à poids dans le disque unité relativement à l'espace

A^2_α la fonction

$$\begin{aligned} K_\alpha : \ \mathbb{D}\times\mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z,w) &\longmapsto K_\alpha(z,w) = \overline{k^\alpha_z(w)}. \end{aligned}$$

Cette fonction joue un rôle important dans la théorie des espaces de Bergman.

Remarque 2.2.1. Le noyau de Bergman K_α reproduit tous les éléments de A^2_α en ce sens que pour tout f appartenant à A^2_α on a :

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K_\alpha(z,w)\mathrm{d}A_\alpha(w) \text{ pour tout } z\in\mathbb{D} \ . \tag{2.10}$$

Théorème 2.2.1. (Caractérisation du noyau de Bergman)
Le noyau de Bergman K_α est la seule fonction définie dans $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ telle que :

(1) Pour tout $w\in\mathbb{D}$, la fonction $z\longmapsto K_\alpha(z,w)$ est une fonction de A^2_α.

(2) Pour tous $z,w\in\mathbb{D}$, $K_\alpha(z,w)=\overline{K_\alpha(w,z)}$.

(3) K_α reproduit tout élément de A^2_α au sens (2.10).

Preuve. De ce qui précède, K_α vérifie les propriétés (1) et (3). Soient z et w deux éléments de $\mathbb{D}$. Comme k^α_z est un élément de A^2_α, alors en appliquant (2.10) on a

$$\begin{aligned} k^\alpha_z(w) &= \int_{\mathbb{D}} k^\alpha_z(v)K_\alpha(w,v)\mathrm{d}A_\alpha(v) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \overline{K_\alpha(z,v)k^\alpha_w(v)}\mathrm{d}A_\alpha(v) \\ &= \overline{\int_{\mathbb{D}} k^\alpha_w(v)K_\alpha(z,v)\mathrm{d}A_\alpha(v)} \\ &= \overline{k^\alpha_w(z)} \ . \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que $K_\alpha(z,w)=\overline{K_\alpha(w,z)}$ ce qui prouve que (2) est vérifié.
Considérons à présent φ une autre fonction définie sur $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). Soient z,w deux éléments de $\mathbb{D}$. $\varphi(\cdot,w)$ étant un élément de A^2_α et K_α reproduisant les éléments de A^2_α, alors on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(z,w) &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(v,w)K_\alpha(z,v)\mathrm{d}A_\alpha(v) \\ &= \overline{\int_{\mathbb{D}} k^\alpha_z(v)\varphi(w,v)\mathrm{d}A_\alpha(v)} \\ &= \overline{k^\alpha_z(w)} \\ &= K_\alpha(z,w) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de la propriété (2) et la troisième vient du fait que k^α_z est un élément de A^2_α et que φ reproduit les éléments de A^2_α. On en déduit donc l'unicité de K_α. ■

Corollaire 2.2.1. Le noyau de Bergman $K_\alpha(z,w)$ est holomorphe en z et antiholomorphe en w.

Proposition 2.2.2. Si la famille $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est une base hilbertienne de A^2_α, alors la série de fonctions définie pour z, w appartenant à $\mathbb{D}$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ et sa somme est indépendante de la base hilbertienne choisie. De plus, elle converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ vers le noyau de Bergman.

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{D}$. Soient f un élément de A^2_α et w appartenant à $\mathbb{D}$. D'après l'identité de Parseval-Bessel, on a :

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \varphi_n\rangle_\alpha \varphi_n(w) \ , \tag{2.11}$$

$$\|f\|^2_{2,\,\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle_\alpha|^2 \, . \tag{2.12}$$

Ce qui montre que la connaissance d'un élément f de A^2_α est entièrement déterminé par la connaissance d'une suite complexe $\{a_n\}_n$ à carrés sommables (c'est-à-dire une suite telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$). Par ailleurs

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(w)|^2\right)^{1/2} = \sup\left\{\left|\sum a_n\varphi_n(w)\right| \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = 1\right\} \ .$$

On aboutit donc aux relations :

$$\begin{aligned} \sup\left\{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(w)|^2\right)^{1/2} ; \ w \in K\right\} &= \sup\left\{\left|\sum a_n\varphi_n(w)\right| \ \ w\in K, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = 1\right\} \\ &= \sup\left\{|f(w)| : w\in K \ , \ \|f\|_{A^2_\alpha} = 1\right\} \le C_{K,\,\alpha} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence des relations (2.11) , (2.12) et la remarque ci-dessus. Puis la dernière inégalité est une conséquence du Lemme 2.1.1. Il vient donc que si z et w sont deux éléments quelconques de K, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}\right| \le \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(w)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(w)|^2\right)^{1/2} \le C^2_{K,\,\alpha} \ .$$

Ceci prouve que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

Considérons donc φ la fonction qui à $(z, w) \in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$ associe $\varphi(z, w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}$.

(1) Soit $w \in \mathbb{D}$. Chaque φ_n étant une fonction holomorphe, d'après le Théorème 1.4.2, la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$ entraîne que $\varphi(\cdot, w)$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Par ailleurs, en considérant $K = \{w\}$ alors, de l'identité de Parsseval-Bessel et de la dernière estimation ci-dessus on obtient :

$$\|\varphi(\cdot, w)\|^2_{2,\,\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(w)|^2 < C^2_{K,\,\alpha} < +\infty \ .$$

Ainsi, $\varphi(\cdot, w)$ est un élément de A^2_α.

(2) Pour z et w appartenant à $\mathbb{D}$ on a : $\varphi(z,w) = \overline{\varphi(w,z)}$.

(3) De plus, pour f appartenant à A^2_α, d'après (2.11), on a pour $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_\alpha \varphi_n(z) = \left\langle f, \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(\cdot)\overline{\varphi_n}(z) \right\rangle_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n}(w) \mathrm{d}A_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\varphi(z,w)\mathrm{d}A_\alpha(w). \end{aligned}$$

Où le passage de la première à la deuxième égalité se justifie par un argument de convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$ de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(\cdot)\overline{\varphi_n}(z)$. Ainsi, φ reproduit tous les éléments de A^2_α. En vertu du Théorème 2.2.1 on déduit que $K_\alpha(z,w) = \varphi(z,w)$ et donc la série
$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n}(w)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ vers le noyau de Bergman.■

Corollaire 2.2.2. Le noyau de Bergman à poids dans le disque unité est défini pour $z, w \in \mathbb{D}$ par

$$K_\alpha(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{2+\alpha}} .$$

De plus,

$$\|k_w^\alpha\|_{2,\,\alpha} = \frac{1}{(1-|w|^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}}.$$

Preuve. Considérons $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty}$ la base hilbertienne définie à la Proposition 2.1.2. En utilisant la Proposition 2.2.2 et l'alinéa (6) de la Propriété 1.4.1 on a :

$$K_\alpha(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}(\overline{w}z)^n = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{2+\alpha}} .$$

Si w est un élément de $\mathbb{D}$, de la formule de reproduction (2.10) on a : $k_w^\alpha(w) = \langle k_w^\alpha, k_w^\alpha \rangle_\alpha$. En d'autres termes,

$$\|k_w^\alpha\|^2_{2,\,\alpha} = \frac{1}{(1-|w|^2)^{2+\alpha}} .$$

D'où

$$\|k_w^\alpha\|_{2,\,\alpha} = \frac{1}{(1-|w|^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}} .$$

■

Nous avons vu que la formule de reproduction du noyau de Bergman dans le disque unité était effective pour les éléments de A^2_α. Qu'en est-il de ceux de A^p_α ? Tout d'abord, signalons que pour z appartenant à $\mathbb{D}$, l'application φ_z interchangeant 0 et z et qui à $w \in \mathbb{D}$ associe

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}$$

est biholomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ (on dit qu'une telle application est un automorphisme de $\mathbb{D}$) et vérifient les propriétés ci-après :

Proposition 2.2.3. Soient z et w deux éléments de $\mathbb{D}$. On a :

(1) $\varphi_z^{-1}(w) = \varphi_z(w)$.

(2) Le jacobien réel de φ_z $\quad |\varphi_z'(w)|^2 = \dfrac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}$.

(3) $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \dfrac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$.

Preuve. On a :

(1)

$$\varphi_z \circ \varphi_z(w) = \frac{z - \dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}} = \frac{z - w|z|^2 - z + w}{1-\overline{z}w - |z|^2 + \overline{z}w} = w.$$

(2)

$$\varphi_z'(w) = \left(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right)' = \frac{-(1-\overline{z}w) + \overline{z}(z-w)}{(1-\overline{z}w)^2} = \frac{-1+|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

D'où

$$|\varphi_z'(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4} .$$

(3)

$$\begin{aligned}
1 - |\varphi_z(w)|^2 &= 1 - \frac{|z-w|^2}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w}) - (z-w)(\overline{z}-\overline{w})}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{1-|w|^2-|z|^2+|z|^2|w|^2}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposition 2.2.4. Le noyau de Bergman reproduit tous les éléments de A^1_α au sens (2.10). C'est-à-dire pour tout $f \in A^1_\alpha$.

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{D} .$$

De plus, si $f \in H(\mathbb{D})$, la convergence de l'intégrale du membre suffit pour avoir l'égalité.

Preuve. Pour f pris dans A^1_α, de la formule de la moyenne planaire (2.3) sur le disque $\mathbb{D}$,

$$f(0) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \mathrm{d}A_\alpha(w) . \tag{2.13}$$

Soit $z \in \mathbb{D}$, en remplaçant f far $f \circ \varphi_z$ dans la relation (2.13), en effectuant un changement de variables et en appliquant respectivement les alinéas (1), (2) et (3) de la Proposition 2.2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_z(0) &= \int_{\mathbb{D}} f(\varphi_z(w)) \mathrm{d}A_\alpha(w) \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(\varphi_z(w))(1-|\varphi_z \circ \varphi_z(w)|^2)^\alpha \mathrm{d}A(w) \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(w)(1-|\varphi_z(w)|^2)^\alpha |\varphi_z'(w)|^2 \mathrm{d}A(w) \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \right)^\alpha \left(\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4} \right) \mathrm{d}A(w). \end{aligned}$$

D'où

$$f(z) = (1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-w\overline{z})^{2+\alpha}(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \; . \tag{2.14}$$

En remplaçant de nouveau f par l'application qui à $w \in \mathbb{D}$ associe $(1-\overline{w}z)^{2+\alpha} f(w)$ dans (2.14), on obtient alors la formule de reproduction :

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w).$$

De plus, l'on constate que la convergence du membre de droite suffit pour qu'on ait l'égalité. ■

Remarque 2.2.2. (1) Étant donné que $A^p_\alpha \subseteq A^1_\alpha$,avec $p \geq 1$ alors l'on déduit que le noyau de Bergman reproduit tout élément de A^p_α au sens (2.10).

(2) Une autre preuve de la Proposition 2.2.4 s'obtient à travers le fait que A^2_α est dense dans A^1_α (voir Proposition 2.1.2) comme conséquence de la densité de A^2_α dans A^1_α et du théorème de la convergence dominée.

2.3 Projecteur de Bergman dans le disque unité

Définition 2.3.1. Le projecteur de Bergman à poids dans le disque unité relatif à la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$ noté P_α, est la projection orthogonale de l'espace $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ sur le sous-espace fermé A^2_α.

Proposition 2.3.1. Le projecteur de Bergman P_α est un opérateur intégral donc le noyau est le noyau de Bergman. Plus précisément pour $f \in L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D} \; . \tag{2.15}$$

Preuve. Soient f un élément de $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ et z appartenant à $\mathbb{D}$. P_α étant la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ sur A^2_α, alors $P_\alpha f$ appartient à A^2_α et $P_\alpha f - f$ est dans l'orthogonal de A^2_α. La formule de reproduction entraîne que $P_\alpha f(z) = \langle P_\alpha f, k^\alpha_z \rangle_\alpha$.

k^α_z et $P_\alpha f - f$ étant orthogonaux, on a la relation $\langle P_\alpha f, k^\alpha_z \rangle_\alpha = \langle f, k^\alpha_z \rangle_\alpha$. Ainsi, $P_\alpha f(z) = \langle P_\alpha f, k^\alpha_z \rangle_\alpha = \langle f, k^\alpha_z \rangle_\alpha$ c'est-à-dire

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(w) \; .$$

■

On montre dans [14] que le projeceur de Bergman est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ pour $1 < p < +\infty$. Dans le paragraphe qui suit présentons les fonctions localement intégrables et positives ω pour lesquelles le projecteur de Bergman est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ pour $1 < p < +\infty$ et de type (1, 1) sur $L^1(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ il s'agit de la classe de Békollé-Bonami.

2.4 Classes $(B_{p,\alpha})$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ de Békollé-Bonami et ses propriétés

Nous présentons dans cette partie la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami relative à l'espace de nature homogène $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$ qui est définie par analogie à celle $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt. Pour le faire, nous introduisons la distance d définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ de la manière suivante : $d(0,0) = 0$, pour $z, \xi \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $d(z,\xi) = ||z| - |\xi|| + |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|$ et $d(z,0) = d(0,z) = |z| + |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|$, où $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\xi = |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Sauf mention contraire, les boules considérées seront désormais relatives à cette distance.

2.4.1 Classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami : Cas $1 \leq p < +\infty$

Tout d'abord, rappelons la définition de la classe $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt relative à l'espace homogène $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Définition 2.4.1. Soient $1 \leq p < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{D}$. On dit que ω (ou que la mesure $\omega \mathrm{d}A_\alpha$) appartient à la classe $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt lorsque :

$$A_{p,\alpha}(\omega) := \sup \frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^{p-1} < +\infty \quad \text{si} \quad p \neq 1$$

le sup portant sur toutes les boules de $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$; ou

$$A_{1,\alpha}(\omega) := \sup_{z \in \mathbb{D}} \omega^{-1}(z) M_\alpha \omega(z) < +\infty \qquad \text{si} \qquad p = 1.$$

Avec M_α désignant la fonction maximale de Hardy-Littlewood (non centrée) qui à une fonction mesurable f associe $M_\alpha f(z) = \sup_B \frac{1_B(z)}{|B|_\alpha} \int_B |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi)$, $z \in \mathbb{D}$, le sup portant également sur toutes les boules de $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Lemme 2.4.1. Soient $\xi \in \mathbb{D}$ et $r > 0$, si on muni $\mathbb{C}$ de la topologie usuelle, alors la boule $B(\xi, r)$ touche la frontière de $\mathbb{D}$ (cercle unité) si et seulement si $r \geq 1 - |\xi|$.

Preuve. Soit z appartenant à l'adhérence de $B(\xi, r)$ dans $\mathbb{C}$ et qui est sur la frontière de $\mathbb{D}$ alors $|z| = 1$ et $d(\xi, z) \leq r$. Donc pour $\xi \neq 0$ $(\xi = |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, $d(\xi, z) = 1 - |\xi| + |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - z| \leq r$ et pour $\xi = 0$ on a $d(0, z) = 1 + |1 - z| \leq r$. Dans les deux cas $1 - |\xi| \leq r$.
Réciproquement, si on suppose que $1 - |\xi| \leq r$; pour un entier naturel n tel que $n > \frac{r}{1 - |\xi|}$, on

pose $z_n = \dfrac{n-r}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\xi = |\xi|e^{i\theta}$ si $\xi \neq 0$ et $z_n = \dfrac{n-r}{n}$ si $\xi = 0$. Alors dans le cas $\xi \neq 0$ on a $d(\xi, z_n) = 1-|\xi|-\dfrac{r}{n} \leq r - \dfrac{r}{n} < r$ $(1-|\xi| \leq r)$ et dans le cas $\xi = 0$, $d(0, z_n) = \dfrac{n-r}{n} < 1 \leq r$ $(1 \leq r)$. Dans tous les cas $d(\xi, z_n) < r$ c'est-à-dire $z_n \in B(\xi, r)$. Par contre, si $\xi \neq 0$, alors $|z_n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \dfrac{r}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est limite dans $\mathbb{C}$ d'une suite de points de $B(\xi, r)$. Si $\xi = 0$ alors $|z_n - 1| = \dfrac{r}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et donc 1 est aussi limite dans $\mathbb{C}$ d'une suite de points de $B(0, r)$. Dans tous les cas, si $1 - |\xi| \leq r$ alors la boule $B(\xi, r)$ touche le bord de $\mathbb{D}$. ■

Nous désignons par $\mathscr{B}$ la collection de toutes les boules qui touchent le bord de $\mathbb{D}$.

Définition 2.4.2. Soient $1 \leq p < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{D}$. On dit que ω (ou que la mesure $\omega \mathrm{d}A_\alpha$) appartient à la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami lorsque :

$$B_{p,\alpha}(\omega) := \sup_{B\in\mathscr{B}} \frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} < +\infty \quad \text{si} \quad p \neq 1 \quad \text{ou}$$

$$B_{1,\alpha}(\omega) := \sup_{z\in\mathbb{D}} \omega^{-1}(z) m_\alpha \omega(z) < +\infty \quad \text{si} \quad p = 1$$

avec m_α qui désigne la fonction maximale (non centrée) définie pour une fonction f intégrable par

$$m_\alpha f(z) = \sup_{B\in\mathscr{B}} \frac{1_B(z)}{|B|_\alpha} \int |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \quad , \quad z \in \mathbb{D}.$$

Remarque 2.4.1.

(1) Il découle des définitions 2.4.1 et 2.4.2 que la classe $(B_{p,\alpha})$ est plus grande que la classe $(A_{p,\alpha})$ $(1 \leq p < +\infty)$. De plus, $B_{p,\alpha}(\omega) \leq A_{p,\alpha}(\omega)$ si $\omega \in (A_{p,\alpha})$.

(2) Les conditions d'appartenance à la classe $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt diffèrent de celles de la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami par les conditions à la frontière de $\mathbb{D}$.

Proposition 2.4.1. Soient $1 < p < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{D}$. Alors, ω appartient à la classe $(B_{p,\alpha})$ si et seulement s'il existe une constante C positive telle que pour toute fonction f positive localement intégrable et pour tout $B \in \mathscr{B}$, on a :

$$\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p \leq \frac{C}{|B|_{\omega,\alpha}}\int_B f^p(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z).$$

Preuve. Soient $B \in \mathscr{B}$ et p' le conjugué de p. Si $\omega \in (B_{p,\alpha})$ alors, en utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p &= \left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(z)\omega^{1/p}(z)\omega^{-1/p}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p \\ &\leq \left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \omega^{-p'/p}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{p/p'}\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f^p(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)\end{aligned}$$

En observant que $-p'/p = 1-p$ et $p/p' = p-1$ il suit que :

$$\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p \leq \frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|B|_{\omega,\alpha}}\int_B f^p(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right). \tag{2.16}$$

Par conséquent on obtient :

$$\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p \leq \frac{B_{p,\alpha}(\omega)}{|B|_{\omega,\alpha}}\int_B f^p(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z). \tag{2.17}$$

Prendre $C = B_{p,\alpha}(\omega)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f localement intégrable et positive et toute boule $B \in \mathscr{B}$ l'inégalité (2.16) est vérifiée. En particulier pour $n \in \mathbb{N}$, si on considère $f_n = \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{1-p'}$, on a $f_n^p = \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{-p'}$ et

$$\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f_n\mathrm{d}A_\alpha\right)^p \leq \frac{C}{|B|_{\omega,\alpha}}\int_B f_n^p\omega\mathrm{d}A_\alpha \leq \frac{C}{|B|_{\omega,\alpha}}\int_B \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{-p'}\omega\mathrm{d}A_\alpha.$$

Alors en remarquant que $f_n = \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{1-p'} \geq \omega\left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{-p'}$, cela entraîne

$$\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha^p}\left(\int_B \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{-p'}\omega\mathrm{d}A_\alpha\right)^{p-1} \leq C.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi pour la suite croissante de fonctions mesurables positives $g_n = \left(\omega + \frac{1}{2^n}\right)^{-p'}$ on déduit que

$$\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq C$$

B étant arbitraire, il en résulte que ω appartient à la classe $(B_{p,\alpha})$. ∎

Propriété 2.4.1. Soit $1 < p < +\infty$.

(1) Pour tout ω appartenant à la classe $(B_{p,\alpha})$, $B_{p,\alpha}(\omega) \geq 1$.

(2) $\omega \in (B_{p,\alpha})$ si et seulement si $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha})$. De plus, $[B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'-1} = B_{p',\alpha}(\omega^{1-p'})$.

(3) Pour tous p_1 et p_2 tels que $1 < p_1 < p_2 < +\infty$, $B_{p_2,\alpha}(\omega) \leq B_{p_1,\alpha}(\omega)$ c'est-à-dire $(B_{p_1,\alpha})$ est contenue dans $(B_{p_2,\alpha})$.

(4) La classe $(B_{1,\alpha})$ est contenue dans la classe $(B_{p,\alpha})$ et on a $B_{p,\alpha}(\omega) \leq [B_{1,\alpha}(\omega)]^p$.

(5) On suppose que $1 \leq p < +\infty$ et que $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et que $B \in \mathscr{B}$ alors il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de ω telle que

$$|2B|_{\omega,\alpha} \leq B_{p,\alpha}(\omega)\delta^p|B|_{\omega,\alpha}. \tag{2.18}$$

L'inégalité (2.18) reste valable pour toute boule lorsque $\omega \in (A_{p,\alpha})$.

Preuve. (1) Soit $B \in \mathscr{B}$. Compte tenu du fait que $\frac{p}{p'} = p - 1$ et $\frac{p'}{p} = p' - 1$, alors de l'inégalité de

Hölder on a

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int \omega^{1/p}(z)\omega^{-1/p}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^p \\ &\leq \left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \omega^{-p'/p}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{p/p'} \\ &= \frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq B_{p,\alpha}(\omega). \end{aligned}$$

(2) Soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$, on pose $\sigma = \omega^{1-p'}$. Comme $\dfrac{p}{p'} = p-1$, $\dfrac{p'}{p} = p'-1$ et $(p'-1)(p-1) = 1$ alors on obtient

$$[B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'-1} = \sup_{B\in\mathscr{B}}\left(\left(\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right) = \sup_{B\in\mathscr{B}}\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p'-1} = B_{p',\alpha}(\omega^{1-p'}).$$

(3) Posons $q_j = \frac{p'_j}{p_j} = \frac{1}{p_j-1} = p'_j - 1$, $j = 1, 2$. Comme $p_1 < p_2$ alors on a $q_1 > q_2$ $\left(\frac{q_1}{q_2} > 1\right)$. Soient $\omega \in (B_{p_1,\alpha})$ et $B \in \mathscr{B}$ l'inégalité de Hölder entraîne que :

$$\int_B 1\cdot\omega^{-q_2}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z) \leq \left(\int_B \omega^{-q_1}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{q_2/q_1}|B|_\alpha^{1-\frac{q_2}{q_1}},$$

d'où

$$\left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \omega^{-q_2}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \omega^{-q_1}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

C'est-à-dire que

$$\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'_2},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p_2-1} \leq \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'_1},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p_1-1} \leq \frac{|B|_\alpha}{|B|_{\omega,\alpha}}B_{p_1,\alpha}(\omega)$$

ou encore

$$\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'_2},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p_2-1} \leq B_{p_1,\alpha}(\omega).$$

Il s'ensuit que $B_{p_2,\alpha}(\omega) \leq B_{p_1,\alpha}(\omega)$ et donc $\omega \in (B_{p_2,\alpha})$.

(4) Soient $B \in \mathscr{B}$ et $\omega \in (B_{1,\alpha})$ alors l'appartenance à la classe $(B_{1,\alpha})$ entraîne que quel que soit $z \in \mathbb{D} : \omega^{1-p'}(z)\left(\dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p'} 1_B(z) \leq [B_{1,\alpha}(\omega)]^{p'}\,\omega(z)1_B(z)$. Par intégration sur les deux membres de cette inégalité on a

$$\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p'-1} \leq [B_{1,\alpha}(\omega)]^{p'}.$$

Puis en observant que $p = p'(p-1)$ et $(p-1)(p'-1) = 1$ on obtient finalement

$$\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq [B_{1,\alpha}(\omega)]^{p}.$$

D'où $B_{p,\alpha}(\omega) \leq [B_{1,\alpha}(\omega)]^p$. Ce qui prouve que $(B_{1,\alpha}) \subseteq (B_{p,\alpha})$ et $B_{1,\alpha}(\omega) \geq 1$ puisque

$B_{p,\alpha}(\omega) \geq 1$.

(5) En appliquant l'inégalité (2.17) où l'on remplace B par $2B$ et f par 1_B avec $B \in \mathscr{B}$ on obtient

$$\left(\frac{|B|_\alpha}{|2B|_\alpha}\right)^p \leq B_{p,\alpha}(\omega)\left(\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|2B|_{\omega,\alpha}}\right).$$

Comme la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$ est doublante, il existe $\delta > 0$ tel que $|2B|_\alpha \leq \delta|B|_\alpha$. Ainsi on a $|2B|_{\omega,\alpha} \leq B_{p,\alpha}(\omega)\delta^p|B|_{\omega,\alpha}$.

On suppose maintenant que $p = 1$, $B \in \mathscr{B}$ alors la condition d'appartenance à la classe $(B_{1,\alpha})$ entraîne que quelque soit $z \in \mathbb{D}$, $1_{2B}(z)\dfrac{|2B|_{\omega,\alpha}}{|2B|_\alpha} \leq \omega(z)B_{1,\alpha}(\omega)$ et intégrant cette inégalité sur B on aboutit à $\dfrac{|2B|_{\omega,\alpha}}{|B|_{\omega,\alpha}} \leq \dfrac{|2B|_\alpha}{|B|_\alpha}B_{1,\alpha}(\omega) \leq \delta B_{1,\alpha}(\omega)$. On a donc aussi $|2B|_{\omega,\alpha} \leq \delta B_{1,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}$.

Si $\omega \in (A_{p,\alpha})$ on procède de la même façon, sachant que l'inégalité (2.17) est vraie pour des boules quelconques. ■

2.4.2 Classe $(B_{\infty,\alpha})$ de Békollé-Bonami

Nous avons observé que les classes $(B_{p,\alpha})$ $(1 \leq p < +\infty)$ étaient croissantes par rapport à p. Nous allons définir la classe limite qui contient toutes les autres classes. Elle se définit également par analogie à la classe $(A_{\infty,\alpha})$ de Muckenhoupt.

Définition 2.4.3. On dit qu'un poids ω (ou que la mesure $\omega \mathrm{d}A_\alpha$) appartient à la classe $(B_{\infty,\alpha})$ si pour tout δ tel que $0 < \delta < 1$, il existe β vérifiant $0 < \beta < 1$ et telle que pour toute boule B touchant le bord de $\mathbb{D}$ et tout sous-ensemble mesurable E de B,

$$|E|_\alpha \geq \delta|B|_\alpha \Rightarrow |E|_{\omega,\alpha} \geq \beta|B|_{\omega,\alpha}.$$

(Dans le cas de la classe $(A_{\infty,\alpha})$ les boules considérées sont quelconques).

Proposition 2.4.2. La classe $(B_{p,\alpha})$ $(1 \leq p < +\infty)$ est contenue dans la classe $(B_{\infty,\alpha})$.

Preuve. Comme la classe $(B_{1,\alpha})$ est contenu dans la classe $(B_{1,\alpha})$, on peut supposer que $p \neq 1$. Soit ω appartenant à la classe $(B_{p,\alpha})$ $(1 < p < +\infty)$. Soient $B \in \mathscr{B}$ et E un sous-ensemble mesurable de B tels que $|E|_\alpha \geq \delta|B|_\alpha$ $(0 < \delta < 1)$. En prenant $f = 1_E$, alors compte tenu de (2.17) on a

$$\delta^p \leq \left(\frac{|E|_\alpha}{|B|_\alpha}\right)^p \leq B_{p,\alpha}(\omega)\frac{|E|_{\omega,\alpha}}{|B|_{\omega,\alpha}}.$$

Ou encore $|E|_{\omega,\alpha} \geq \beta|B|_{\omega,\alpha}$ avec $\beta = \dfrac{\delta^p}{B_{p,\alpha}(\omega)} < 1$ car $B_{p,\alpha}(\omega) \geq 1$. ■

Nous terminons ce chapitre en indiquant que des informations supplémentaires relatives à la théorie des espaces de Bergman dans le disque unité sont mentionnées dans [14]. Dans le prochain chapitre nous étudierons la continuité du projecteur de Bergman sur les espaces L^p à poids .

Chapitre Trois

Continuité du projecteur de Bergman sur les espaces L^p à poids du disque unité

Les notations du chapitre 2 sont conservées. Notre but ici est d'étendre la continuité du projecteur de Bergman P_α sur les espaces $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}\mu_\alpha)$ dans le cas d'une mesure μ_α absolument continue par rapport à la mesure radiale $\mathrm{d}A_\alpha$. Plus précisement, compte tenu du théorème de décomposition de Radon-Nikodym, nous caractérisons les classes des fonctions ω positives et localement intégrables sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles :

(1) P_α envoie continûment $L^p(\mathbb{D}, \omega\mathrm{d}A_\alpha)$ dans lui même $(1 < p < +\infty)$;

(2) P_α est faiblement continu sur $L^1(\mathbb{D}, \omega\mathrm{d}A_\alpha)$.

Il s'agit ici de prouver les résultats dus à David Békollé et Aline Bonami [4]. Ils démontrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété (1) (respectivement (2)) soit satisfaite est que ω appartienne à la classe $(B_{p,\alpha})$ (respectivement $(B_{1,\alpha})$) de Békollé-Bonami. Il est bien connu d'après les résultats de la théorie des intégrales singulières que les fonctions de la classe $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt satisfont à ces propriétés. Cependant, pour prouver ces résultats, on procède à peu près comme l'ont fait Coifman et Fefferman dans le cas de la transformée de Hilbert dans [9]. Sauf que pour les conditions suffisantes on régularise les poids de Békollé-Bonami de façon à retrouver les poids de Muckenhoupt, ce qui permet de conclure comme Coifman et Fefferman.

3.1 Le projecteur de Bergman est une intégrale singulière

Notre objectif dans cette section est de prouver que le projecteur de Bergman est de type faible (1,1) sur $L^1(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Nous rappelons que la distance d définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ de la manière suivante :
$d(0, 0) = 0$, pour $z, \xi \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,
$d(z, \xi) = ||z| - |\xi|| + |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|$ et $d(z, 0) = d(0, z) = |z| + |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|$, où $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\xi = |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
Cette distance possède les propriétés ci-après :

Propriété 3.1.1. Pour tous $z, \xi \in \mathbb{D}$ on a :

(1)

$$|1 - z\bar{\xi}| \geq \frac{1}{3} d(z, \xi) \tag{3.1}$$

(2)
$$|z-\xi| \leq d(z,\xi) \tag{3.2}$$

(3)
$$|1-z\overline{\xi}| \leq 1-|\xi|^2 + d(z,\xi) \tag{3.3}$$

Preuve. Les cas $z = 0$ ou $\xi = 0$ étant immédiats, on suppose donc $z, \xi \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\xi = |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

(1) $|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}| \leq |1-z\overline{\xi}| + |z\overline{\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}| = |1-z\overline{\xi}| + 1 - |z\overline{\xi}| \leq 2|1-z\overline{\xi}|$
Mais, on a $|1-z\overline{\xi}|^2 - ||z|-|\xi||^2 = (1-|z|^2)(1-|\xi|^2) + 2|z||\xi|(1-\cos(\theta-\varphi)) \geq 0$. Soit $||z|-|\xi|| \leq \left|1-z\overline{\xi}\right|$. Ainsi $d(z,\xi) = ||z|-|\xi|| + |1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}| \leq 3|1-z\overline{\xi}|$.

(2) $|z-\xi| \leq \left||z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| + \left||\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - |\xi|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| \leq ||z|-|\xi|| + \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| = d(z,\xi)$.

(3) $|1-z\overline{\xi}| \leq |1-|\xi|^2| + |\xi\overline{\xi} - z\overline{\xi}| = 1-|\xi|^2 + |z-\xi||\overline{\xi}| \leq 1-|\xi|^2 + d(z,\xi)$. D'après (3.2). ■

Lemme 3.1.1. Soient $\xi \in \mathbb{D}$ et $0 < R < 4$.
Si on suppose que $B(\xi,R) = \{z \in \mathbb{D} : d(z,\xi) < R\}$ est la boule de centre ξ et de rayon R alors $A_\alpha(B(\xi,R)) \simeq R^2 \{\max(R, 1-|\xi|)\}^\alpha$.

Preuve. Cf [4] ■

Remarque 3.1.1. Le triplet $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$ est un espace homogène (voir Définition 1.5.1). En effet, pour $\xi \in \mathbb{D}$ et $R > 0$, d'après le Lemme 3.1.1 il existe deux composantes positives δ_1 et δ_2 indépendantes de ξ et R telles que $\delta_1 R^2 \{\max(R, 1-|\xi|)\}^\alpha \leq A_\alpha(B(\xi,R))$ et $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq 4\delta_2 R^2 \{\max(2R, 1-|\xi|)\}^\alpha$. On distingue trois cas :

1$^{\text{er}}$ cas $1-|\xi| \leq R < 2R$, on a : $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq 2^{2+\alpha}\delta_2 R^{2+\alpha} \leq \dfrac{2^{2+\alpha}\delta_2}{\delta_1} A_\alpha(B(\xi,R))$.

2$^{\text{ème}}$ cas $R < 2R \leq 1-|\xi|$, on a $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq 4\delta_2 R^2 (1-|\xi|)^\alpha \leq \dfrac{4\delta_2}{\delta_1} A_\alpha(B(\xi,R))$.

3$^{\text{ème}}$ cas $R < 1-|\xi| < 2R$,

- Si $0 \leq \alpha < +\infty$ alors $R^\alpha \leq (1-|\xi|)^\alpha \leq 2^\alpha R^\alpha$ et on a que $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq \frac{2^{2+\alpha}\delta_2}{\delta_1} A_\alpha(B(\xi,R))$.
- Si $-1 < \alpha < 0$ alors $2^\alpha R^\alpha < (1-|\xi|)^\alpha < R^\alpha$ et on a $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq \frac{4\delta_2}{\delta_1} A_\alpha(B(\xi,R))$.

En prenant $\delta = \dfrac{4\delta_2}{\delta_1}\max(1, 2^\alpha)$ on a $A_\alpha(B(\xi,2R)) \leq \delta A_\alpha(B(\xi,R))$. Ce qui prouve que $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$ est un espace homogène.

On rappelle que le noyau de Bergman est défini pour $z, w \in \mathbb{D}$ par $K_\alpha(z,\xi) = \dfrac{1}{(1-z\overline{\xi})^{2+\alpha}}$. Conformément à la Définition 1.5.3, la proposition suivante montre que le noyau de Bergman est un $(2+\alpha)$-noyau de Calderòn-Zygmund.

Proposition 3.1.1. (1) Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tous $z, \xi \in \mathbb{D}$
$|K_\alpha(z,\xi)| \leq \dfrac{C_1}{d(z,\xi)^{2+\alpha}}$.

(2) Il existe deux constantes positives C_2 et C_3 telles que pour tous $z, \xi, \xi_0 \in \mathbb{D}$, si $d(z,\xi_0) \geq C_2 d(\xi,\xi_0)$ on a :

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq C_3 \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{|1-z\overline{\xi_0}|^{2+\alpha+1/2}} \quad , \tag{3.4}$$

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq C_3 \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}} \quad , \tag{3.5}$$

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq \frac{1}{2}|K_\alpha(z,\xi_0)| \quad . \tag{3.6}$$

Preuve. (1) Il découle de l'inégalité (3.1) qu'on peut prendre $C_1 = 3^{2+\alpha}$.

(2) Choisissons d'abord $C_2 \geq 1$ et prenons z, ξ et ξ_0 dans $\mathbb{D}$ tels que $d(z,\xi_0) \geq C_2 d(\xi,\xi_0)$. Par intégration sur le segment $[\xi,\xi_0]$ on a

$$K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0) = (2+\alpha)\int_0^1 \frac{z(\xi-\xi_0)}{\left(1 - z\left(\overline{\xi_0 + t(\xi-\xi_0)}\right)\right)^{3+\alpha}} \mathrm{d}t.$$

En posant $\eta(t) = \xi_0 + t(\xi - \xi_0)$ on obtient

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq (2+\alpha)\int_0^1 \frac{|\xi-\xi_0|}{|1 - z\overline{\eta(t)}|^{3+\alpha}} \mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

En appliquant successivement les inégalités (3.2), $d(z,\xi_0) \geq C_2 d(\xi,\xi_0)$ et (3.1) on obtient $|\xi - \xi_0| \leq \dfrac{3}{C_2}|1 - z\overline{\xi}_0|$. De plus si on impose que $C_2 \geq 6$ alors on déduit que :

$$\begin{aligned} |1 - z\overline{\xi}_0| - |1 - z\overline{\eta}(t)| &\leq |(1 - z\overline{\xi}_0) - (1 - z\overline{\eta}(t) = t|z(\xi-\xi_0)| \\ &\leq \frac{3}{C_2}|1 - z\overline{\xi}_0| \leq \frac{1}{2}|1 - z\overline{\xi}_0|. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que si $C_2 \geq 6$, alors

$$|1 - z\overline{\eta}(t)| \geq \frac{1}{2}|1 - z\overline{\xi}_0|. \tag{3.8}$$

D'autre part, des inégalités (3.2), $d(z,\xi_0) \geq C_2 d(\xi,\xi_0)$ et (3.1) on a aussi

$$|\xi - \xi_0| \leq d(\xi,\xi_0) \leq \frac{1}{\sqrt{C_2}} d(\xi,\xi_0)^{1/2} d(z,\xi_0)^{1/2} \leq \sqrt{3} d(\xi,\xi_0)^{1/2}|1 - z\overline{\xi}_0|^{1/2}.$$

C'est-à-dire que,

$$|\xi - \xi_0| \leq \sqrt{3} d(\xi,\xi_0)^{1/2}|1 - z\overline{\xi}_0|^{1/2} \tag{3.9}$$

Ainsi en appliquant successivement les inégalités (3.8) et (3.9) dans la relation (3.7) il en résulte que

$$\begin{aligned} |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| &\leq \sqrt{3}(2+\alpha)2^{3+\alpha} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{|1 - z\overline{\xi}_0|^{2+\alpha+1/2}} \\ &\leq 3(2+\alpha)6^{2+\alpha} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}} \quad \text{d'après (3.1).} \end{aligned}$$

On peut donc prendre $C_3 \geq 3(2+\alpha)6^{3+\alpha}$ pour avoir (3.4) et (3.5). Pour l'estimation (3.6), en remarquant comme précédemment que

$|\xi - \xi_0| \leq \dfrac{3}{C_2}|1 - z\bar{\xi}_0|$, alors les inégalités (3.7) et (3.8) entraînent que

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq (2+\alpha)2^{3+\alpha}\frac{|\xi-\xi_0|}{|1-z\bar{\xi}_0|^{3+\alpha}} \leq \frac{3(2+\alpha)2^{3+\alpha}}{C_2|1-z\bar{\xi}_0|^{2+\alpha}} .$$

Il suffit donc de prendre $C_2 \geq 6(2+\alpha)2^{3+\alpha} > 6$ pour avoir (3.6).

■

Théorème 3.1.1. Pour $-1 < \alpha < +\infty$, le projecteur de Bergman s'étend en un opérateur faiblement continu sur $L^1(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Preuve. Selon la théorie des intégrales singulières sur les espaces homogènes développée par Coifman et Weiss, il suffit de réunir les hypothèses du Théorème 1.5.2 où l'espace homogène considéré ici est le triplet $(\mathbb{D}, d, \mathrm{d}A_\alpha)$. Pour ce faire considérons C_2 et C_3 les constantes de la Proposition 3.1.1. Pour $\xi, \xi_0 \in \mathbb{D}$, posons $\varepsilon = C_2 d(\xi,\xi_0)$ on a les estimations ci-après :

(1) En remarquant que $|1 - z\overline{\xi_0}| \geq 1 - |\xi_0|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, compte tenu du Lemme 3.1.1 on a

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon \leq d(z,\xi_0) < 1-|\xi_0|} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{|1-z\bar{\xi}_0|^{2+\alpha+1/2}}\mathrm{d}A_\alpha(z) &\leq \frac{\varepsilon^{1/2}A_\alpha(B(\xi_0, 1-|\xi_0|))}{\sqrt{C_2}(1-|\xi_0|)^{2+\alpha+1/2}} \\ &\lesssim \left(\frac{d(\xi,\xi_0)}{1-|\xi_0|}\right)^{1/2} \lesssim \frac{1}{\sqrt{C_2}}.\end{aligned}$$

Puisque $1 - |\xi_0| > C_2\, d(\xi,\xi_0)$.

(2) Si on pose $r = max(\varepsilon, 1-|\xi_0|)$ alors, $1 - |\xi_0| \leq \varepsilon$ et pour tout entier naturel n, on a : $A_\alpha(B(\xi_0, 2^{n+1}r)) \simeq (2^{n+1}r)^{2+\alpha}$ (voir Lemme 3.1.1).

Par suite, comme $\mathbb{D} \setminus B(\xi_0, r) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ avec $E_n = B(\xi_0, 2^{n+1}r) \setminus B(\xi_0, 2^n r)$, en appliquant le théorème de Beppo-Levi à la suite de fonctions définie par

$f_n(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}} 1_{E_j}(z)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{r<d(z,\xi_0)} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}}\mathrm{d}A_\alpha(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{C_2}}\int_{2^n r \leq d(z,\xi_0) < 2^{n+1}r}\frac{\mathrm{d}A_\alpha(z)}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{r^{1/2}A_\alpha(B(\xi_0, 2^{n+1}r))}{\sqrt{C_2}(2^n r)^{2+\alpha+1/2}} \\ &\lesssim \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2+\alpha}}{\sqrt{C_2}2^{n/2}} = \frac{2^{2+\alpha}(2+\sqrt{2})}{\sqrt{C_2}} .\end{aligned}$$

D'autre part, compte tenu des égalités (3.5) et (3.6) on a :

$$\begin{aligned}\int_{d(z,\xi_0)>\varepsilon} |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \mathrm{d}A_\alpha(z) &\leq \int\limits_{\varepsilon<d(z,\xi_0)<1-|\xi_0|} |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \mathrm{d}A_\alpha(z) \\ &\quad + \int\limits_{r=max(\varepsilon,1-|\xi_0|)<d(z,\xi_0)} |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \mathrm{d}A_\alpha(z) \\ &\leq C_3 \int\limits_{\varepsilon<d(z,\xi_0)<1-|\xi_0|} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{|1-z\bar{\xi}_0|^{2+\alpha+1/2}} \mathrm{d}A_\alpha(z) + \\ &\quad C_3 \int\limits_{r<d(z,\xi_0)} \frac{d(\xi,\xi_0)^{1/2}}{d(z,\xi_0)^{2+\alpha+1/2}} \mathrm{d}A_\alpha(z).\end{aligned}$$

Il en résulte donc des estimations (1) et (2) ci-dessus qu'il existe une constante C_3' positive convenablement choisie et indépendante de ξ et ξ_0 telle que

$$\int_{d(z,\xi_0)>C_2 d(\xi,\xi_0)} |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \mathrm{d}A_\alpha(z) \leq C_3'.$$

De plus, le projecteur de Bergman P_α est de type $(2,2)$ sur $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Ce qui achève la preuve. ∎

Remarque 3.1.2. Par le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz(Théorème 1.2.1), P_α est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ lorsque $1 < p \leq 2$. Comme P_α est auto-adjoint, pour $2 \leq p < +\infty$ on a $1 < p' \leq 2$ où p' est l'exposant conjugué de p ; on déduit que P_α est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Dans toute la suite, pour un sous-ensemble mesurable E de $\mathbb{D}$ et ω un poids sur $\mathbb{D}$ (une fonction positive et localement intégrable) nous adoptons les notations ci-après :

- 1_E désigne la fonction indicatrice sur E.
- $|E|_\alpha = \displaystyle\int_E \mathrm{d}A_\alpha(z)$.
- $|E|_{\omega,\alpha} = \displaystyle\int_E \omega(z) \mathrm{d}A_\alpha(z)$.
- pour $1 < p < +\infty$, on notera p' l'exposant conjugué de p c'est-à-dire qu'on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
- $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ sera noté simplement $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 \leq p < +\infty)$.

Dans ce qui suit, nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur un poids ω pour laquelle le projecteur de Bergman est de type (p,p) sur $L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(1 < p < +\infty)$ d'une part ou de type faible $(1,1)$ sur $L^1(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ d'autre part.

3.2 Conditions nécessaires

Lemme 3.2.1. Soit $B = B(\xi_0, R)$ une boule touchant le bord de $\mathbb{D}$ avec $R < \frac{1}{2C_2}$ où $(C_2 > 6)$ est la constante issue de la Proposition 3.1.1. Il existe une boule $B' = B(\xi_0', R)$ de même rayon touchant le bord de $\mathbb{D}$ telle que $d(B, B') \simeq R$ pour laquelle quelque soit la fonction positive f à support dans B (resp dans B') on a :

$$|P_\alpha f(z)| \geq \frac{C_\alpha 1_{B'}(z)}{|B|_\alpha} \int_B f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \quad \left(\text{resp} \quad |P_\alpha f(z)| \geq \frac{C_\alpha 1_B(z)}{|B'|_\alpha} \int_{B'} f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)$$

où C_α est une constante positive indépendante de B, B' et f.

Preuve. Comme $B \in \mathscr{B}$ alors par hypothèse on a $1-|\xi_0| \leq R < \dfrac{1}{2C_2}$. Nous cherchons $\xi_0' \in \mathbb{D}$ de telle sorte que $d(\xi_0, \xi_0') = 2C_2R$ et $|\xi_0| = |\xi_0'|$; ce qui est équivalent à $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|^2 = (2C_2R)^2$ où on a posé $\xi_0 = |\xi_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\xi_0' = |\xi_0'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. On doit avoir $1-\cos(\theta-\varphi) = 2C_2^2R^2$, soit $\varphi = \theta \pm$ Arccos$(1-2C_2R^2)$ qui existe car le choix de R entraîne que $\dfrac{1}{2} < 1-2C_2^2R^2 < 1$.
L'existence de ξ_0' étant prouvée, alors en vertu du Lemme 3.2.1 les boules B et B' touchent le bord de $\mathbb{D}$. Par ailleurs, on a $d(B,B') \simeq R$. En effet, si $z \in B$ et $z' \in B'$ alors

$$d(B,B') \leq d(z,z') \leq d(z,\xi_0) + d(\xi_0,\xi_0') + d(\xi_0',z') = 2(C_2+1)R.$$

Inversement, $2C_2R = d(\xi_0,\xi_0') \leq d(\xi_0,z) + d(z,z') + d(z',\xi_0') \leq 2R + d(z,z')$. D'où $2(C_2-1)R \leq d(z,z')$. Il en résulte que $2(C_2-1)R \leq d(B,B') \leq 2(C_2+1)R$.

En vue de montrer la dernière assertion du Lemme, fixons d'abord $z \in B'$ et $\xi \in B$. Alors on a : $2C_2R = d(\xi_0.\xi_0') \leq d(z,\xi_0) + d(z,\xi_0') \leq d(z,\xi_0) + R$. D'où $d(z,\xi_0) \geq C_2R + (C_2-1)R > C_2\, d(\xi,\xi_0)$. C'est-à-dire $d(z,\xi_0) \geq C_2\, d(\xi,\xi_0)$. La Proposition 3.1.1 entraîne que

$$|K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| \leq \frac{1}{2}|K_\alpha(z,\xi_0)|.$$

On déduit de cette inégalité que si f est à support dans B et $z \in B'$ alors on a

$$\begin{aligned}
|P_\alpha f(z)| &= \left| K_\alpha(z,\xi_0)\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) + \int_B (K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0))\, f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right| \\
&\geq |K_\alpha(z,\xi_0)|\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) - \int_B |K_\alpha(z,\xi) - K_\alpha(z,\xi_0)| f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha \\
&\geq \frac{1}{2}|K_\alpha(z,\xi_0)|\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha\,.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$|P_\alpha f(z)| \geq \frac{1_{B'}(z)}{2|1-z\overline{\xi_0}|^{2+\alpha}}\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi). \tag{3.10}$$

Comme $d(\xi_0',\xi_0) = 2C_2R\ d(z,\xi_0') \leq R$, des inégalités (3.3), $1-|\xi_0| \leq R$ et $1-|\xi_0|^2 \leq 2(1-|\xi_0|)$, on déduit que

$$|1-z\overline{\xi}| \;\leq\; 1-|\xi_0|^2 + d(z,\xi_0) \leq 2(1-|\xi_0| + d(z,\xi_0') + d(\xi_0',\xi_0)) \leq 4(C_2+1)R.$$

Et en vertu du Lemme 3.1.1 $|B|_\alpha \simeq R^{2+\alpha}$. Donc, il existe une constante C_α positive indépendante de B, B' et f telle que $|1-z\overline{\xi}_0|^{2+\alpha} \leq (4(C_2+1)R)^{2+\alpha} \leq \dfrac{C_\alpha^{-1}}{2}|B|_\alpha$; ce qui entraîne que dans (3.10) on obtient $|P_\alpha f(z)| \geq \dfrac{C_\alpha 1_{B'}(z)}{|B|_\alpha}\displaystyle\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)$.
En permutant les rôles de ξ_0 et ξ_0', on a aussi $|P_\alpha f(z)| \geq \dfrac{C_\alpha 1_B(z)}{|B'|_\alpha}\displaystyle\int_{B'} f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)$, lorsque f est à support dans B'. Ce qui achève la preuve du lemme. ∎

3.2.1 Condition nécessaire : cas $1 < p < +\infty$

Il est important de savoir la condition que vérifie un poids ω lorsque le projecteur de Bergman est bien défini sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ avec $1 < p < +\infty$. On a :

Proposition 3.2.1. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$. Si le projecteur de Bergman $P_\alpha f$ est bien défini pour tout f appartenant à $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a :

$$P_\alpha^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{|1 - z\overline{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(z) < +\infty$$

alors $\omega^{1-p'}$ est intégrable.

Preuve. Si onconsidère le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega,\alpha}$ défini par

$$\langle f, g \rangle_{\omega,\alpha} = \int_{\mathbb{D}} f \overline{g} \omega \mathrm{d}A_\alpha \ , \ \ f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \ \text{ et } \ g \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha).$$

Conformément au théorème de représentation de Riesz (Théorème 1.1.8) une fonction $g \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ si et seulement si pour tout $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $|\langle f, g \rangle_{\omega,\alpha}| < +\infty$. Donc si $g \notin L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ $(g \geq 0)$ alors il existe une fonction $f \geq 0$, $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ telle que $\langle f, g \rangle_{\omega,\alpha} = +\infty$.
On veut montrer que $\omega^{1-p'} \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, ce qui est équivalent à montrer que $\omega^{-1} \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. Si on suppose que $\omega^{-1} \notin L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors de ce qui précède il existe une fonction $f \geq 0$ telle que $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $\langle f, \omega^{-1} \rangle_{\omega,\alpha} = +\infty$, soit $\int_{\mathbb{D}} f \mathrm{d}A_\alpha = +\infty$. D'où $P_\alpha^+ f(0) = \int_{\mathbb{D}} f \mathrm{d}A_\alpha = +\infty$. Mieux, $P_\alpha^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{|1 - z\overline{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(z) \geq \frac{1}{2^{2+\alpha}} \int f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha = +\infty$. Ce qui contredit le fait que $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.
Donc si $P_\alpha f$ est bien défini pour tout $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors, $\omega^{1-p'} \in L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$. ∎

Théorème 3.2.1. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$. Si le projecteur de Bergman est bien défini et continu sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors ω est dans la classe $(B_{p,\alpha})$.

Preuve. On suppose qu'il existe une constante $C_{p,\alpha} > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$,

$$\|P_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha} \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{3.11}$$

Comme P_α est bien défini, alors en vertu de la Proposition 3.2.1 , $\omega^{1-p'}$ est intégrable. Montrons que ω est aussi intégrable. Si on pose $f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} 1_{D(0,r)}(z) \quad (0 < r < 1)$ et $M_r = \sup_{z \in D(0,r)} (1 - |z|^2)^{-\alpha}$ alors $\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq M_r^p |D(0,r)|_{\omega,\alpha} < +\infty$ puisque ω est localement intégrable sur $\mathbb{D}$. En plus, l'application $z \longmapsto \overline{K_\alpha(z, \xi)}$ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$, alors de la formule de la moyenne planaire sur le disque $D(0, r)$ on obtient

$$P_\alpha f(z) \ = \ \int_{D(0,r)} K_\alpha(z, \xi)(1 - |\xi|^2)^{-\alpha} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) = (\alpha + 1) r^2 K_\alpha(z, 0) = (\alpha + 1) r^2.$$

On en déduit donc de l'hypothèse (3.11) l'intégrabilité de ω comme suit :

$$\|P_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \left((\alpha + 1) r^2\right)^p \int_{\mathbb{D}} \omega \mathrm{d}A_\alpha \leq C^p_{p,\alpha} \|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} < +\infty.$$

En vue de montrer que $\omega \in (B_{p,\alpha})$, considérons d'abord une boule $B \in \mathscr{B}$ de rayon inférieur à $\frac{1}{2C_2}$. Du Lemme 3.2.1 il existe une autre boule B' de même rayon et une constante $C_\alpha > 0$ indépendante de B et B' telles que pour toute fonction f localement intégrable et positive on a :

$$|P_\alpha f(z)| \geq C_\alpha \frac{1_{B'}(z)}{|B|_\alpha} \int_B f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \quad \text{et} \quad |P_\alpha f(z)| \geq C_\alpha \frac{1_B(z)}{|B'|_\alpha} \int_{B'} f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi).$$

Ces inégalités entraînent respectivement $|P_\alpha 1_B(z)|^p \geq C_\alpha^p 1_{B'}(z)$ et $|P_\alpha 1_{B'}(z)|^p \geq C_\alpha^p 1_B(z)$.
En intégrant sur $\mathbb{D}$ par rapport à la mesure $\omega \mathrm{d}A_\alpha$, alors compte tenu de l'hypothèse (3.11), on obtient

$$|B'|_{\omega,\alpha} \leq C_\alpha^{-p} C_{p,\alpha}^p |B|_{\omega,\alpha} \quad \text{et} \quad |B|_{\omega,\alpha} \leq C_\alpha^{-p} C_{p,\alpha}^p |B'|_{\omega,\alpha}.$$

En posant $C = C_\alpha^{-p} C_{p,\alpha}^p$,on obtient :

$$C^{-1}|B|_{\omega,\alpha} \leq |B'|_{\omega,\alpha} \leq C|B|_{\omega,\alpha}. \tag{3.12}$$

D'autre part, $f = \omega^{1-p'} 1_B \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}^p = |B|_{\omega^{1-p'},\alpha}$ et donc l'inégalité $|P_\alpha f(z)| \geq \dfrac{1_{B'}(z)}{|B|_\alpha} \displaystyle\int_B f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi)$ entraîne que $C_\alpha^p \omega(z) 1_{B'}(z) \left(\dfrac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^p \leq |P_\alpha f(z)|^p \omega(z)$. Par intégration, on déduit, compte tenu de (3.11) et (3.12) que

$$C^{-1}|B|_{\omega,\alpha} \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^p \leq |B'|_{\omega,\alpha} \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^p \leq \|P_\alpha \omega^{1-p'} 1_B\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}^p \leq C_{p,\alpha}^p |B|_{\omega^{1-p'},\alpha}.$$

C'est-à-dire que $\dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \left(\dfrac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^{p-1} \leq C C_{p,\alpha}^p$.
Maintenant, pour finir, supposons que B est un élément quelconque de $\mathscr{B}$ de rayon R supérieur à $\frac{1}{2C_2}$. Comme B touche le bord de $\mathbb{D}$ alors des Lemmes 3.1.1 et 3.2.1 on a $|B|_\alpha \simeq R^{2+\alpha}$. On peut donc trouver une constante $\delta > 0$ telle que $\delta|B|_\alpha \geq R^{2+\alpha} > \frac{1}{(2C_2)^{2+\alpha}}$. La proposition 3.2.1 montre que ω et $\omega^{1-p'}$ sont intégrables ainsi on obtient

$$\frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \left(\frac{|B|_{\omega^{1-p'}}}{|B|_\alpha} \right)^{p-1} \leq |\mathbb{D}|_{\omega,\alpha} (|\mathbb{D}|_{\omega^{1-p'},\alpha})^{p-1} (\delta(2C_2)^{2+\alpha})^p = C'_{p,\alpha}.$$

Finalement, $B_{p,\alpha}(\omega) = \sup\limits_{B \in \mathscr{B}} \dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \left(\dfrac{|B|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha} \right)^{p-1} \leq \max(C C_{p,\alpha}^p, C'_{p,\alpha})$.
Ce qui prouve que ω est dans la classe $(B_{p,\alpha})$. ■

3.2.2 Condition nécessaire : cas $p = 1$

Lemme 3.2.2. Soit ω un poids non nul sur $\mathbb{D}$. Si $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ est contenu dans $L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$, alors cette inclusion est continue. En outre, ω est minoré par une constante positive non nulle.

Preuve. Soient $f \in L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$ et $\{f_n\}_n$ une suite d'éléments de $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ telles que $\|f_n\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \longrightarrow 0$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\mathrm{d}A_\alpha)} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. D'après le Théorème 1.1.6 on peut extraire de la suite

$\{f_n\}_n$ une sous-suite $\{f_{n_k}\}_k$ telle que $f_{n_k} \longrightarrow 0$ $\omega \mathrm{d}A_\alpha$-p.p et $f_{n_k} \longrightarrow f$ $\mathrm{d}A_\alpha$-p.p lorsque $k \longrightarrow +\infty$. La mesure $\omega \mathrm{d}A_\alpha$ étant absolument continue par rapport à la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$, alors $f_{n_k} \longrightarrow f$ $\omega \mathrm{d}A_\alpha$-p.p. Ainsi, $f = 0$ $\omega \mathrm{d}A_\alpha$-p.p, c'est-à-dire $f = 0$ dans $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ qui est contenu dans $L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$. D'où $f = 0$ dans $L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$ ($f = 0$ $\mathrm{d}A_\alpha$-p.p). En vertu du théorème du graphe fermé, il existe une constante $m > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $\|f\|_{L^1(\mathrm{d}A_\alpha)} \leq m^{-1}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$ (d'où la continuité) ou encore $\int_{\mathbb{D}} |f|(\omega - m)\mathrm{d}A_\alpha \geq 0$ pour tout $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.
Du Théorème 1.5.2 on déduit que $\omega \geq m$. ■

Théorème 3.2.2. Soit ω un poids non nul sur $\mathbb{D}$. Si le projecteur de Bergman est bien défini et s'étend en un opérateur faiblement continu dans $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors ω est dans la classe $(B_{1,\alpha})$.

Preuve. La preuve ici est analogue à celle du Théorème 3.2.1 . P_α étant bien défini sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, alors f appartient à $L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$ dès que f est dans $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. En effet, si $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, alors $\int_{\mathbb{D}} |f(\xi)|\mathrm{d}A_\alpha = P_\alpha^+ f(0) < +\infty$. Par conséquent, $\omega^{-1} \in L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$ puisque $\omega^{-1} \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ avec $\|\omega^{-1}\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = 1$. D'après le Lemme 3.2.2 il existe une constante $m > 0$ qui minore ω.
On suppose que P_α est faiblement continu sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors il existe une constante $C_{1,\alpha} > 0$ telle que quelque soient $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $\lambda > 0$,

$$|\{z \in \mathbb{D} : |P_\alpha f(z) \geq \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C_{1,\alpha}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} . \tag{3.13}$$

Comme dans la preuve du Théorème 3.2.1, en prenant $f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha}1_{D(0,r)}(z)$ $(0 < r < 1)$ alors $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq M_r|D(0,r)|_{\omega,\alpha}$ et $P_\alpha f(z) = (\alpha + 1)r^2$. On déduit l'intégrabilité de ω de l'hypothèse (3.13) comme suit

$$|\mathbb{D}|_{\omega,\alpha=} \left|\{z \in \mathbb{D} : |P_\alpha f(z)| = (\alpha + 1)r^2\}\right|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C_{1,\alpha}}{(\alpha + 1)r^2} M_r|D(0,r)|_{\omega,\alpha} < +\infty.$$

Dans l'optique de démontrer que ω est dans la classe $(B_{1,\alpha})$, nous considérons d'abord une boule B de rayon inférieur à $\frac{1}{2C_2}$ (voir Lemme 3.2.1). Alors, il existe une autre boule B' de même rayon et une constante $C_\alpha > 0$ telles que pour toute fonction f positive et localement intégrable, $|P_\alpha f(z)| \geq C_\alpha \frac{1_{B'}(z)}{|B|_\alpha} \int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)$. Ce qui entraîne $|P_\alpha 1_B(z)| \geq C_\alpha 1_{B'}(z)$ ou encore $B' \subseteq \{z \in \mathbb{D} : |P_\alpha 1_B(z)| \geq C_\alpha\}$. On déduit compte tenu de (3.12) que $|B'|_{\omega,\alpha} \leq C_{1,\alpha}C_\alpha^{-1}|B|_{\omega,\alpha}$. En permutant les rôles de B et B' et en posant $C = C_{1,\alpha}C_\alpha^{-1}$ on obtient

$$C^{-1}|B|_{\omega,\alpha} \leq |B'|_{\omega,\alpha} \leq C|B|_{\omega,\alpha}. \tag{3.14}$$

D'autre part, en considérant $f = 1_B\omega^{-1}$ on a l'inégalité $|P_\alpha 1_B\omega^{-1}(z)| \geq C_\alpha \frac{1_{B'}(z)}{|B|_\alpha} \int_B \omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha$ c'est-à-dire $B' \subseteq \left\{z \in \mathbb{D} : |P_\alpha 1_B\omega^{-1}(z)| \geq C_\alpha \frac{|B|_{\omega^{-1},\alpha}}{|B|_\alpha}\right\}$ et compte tenu des inégalités (3.13) et (3.14), on obtient

$$C^{-1}|B'|_{\omega,\alpha} \leq |B|_{\omega^{-1},\alpha} \leq \frac{C|B|_\alpha^2}{|B|_{\omega^{-1},\alpha}} \tag{3.15}$$

car

$$\|1_B\omega^{-1}\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = |B|_\alpha.$$

D'où $\dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \cdot \dfrac{|B|_{\omega^{-1},\alpha}}{|B|_\alpha} \leq C^2$. Mais comme ω est minoré par m on obtient donc de (3.15) que, $m \leq \dfrac{|B|_{\omega^{-1},\alpha}}{|B|_\alpha} \leq C^2$. Finalement, toujours de (3.15) on a $\dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} < m^{-1}C^2$. Pour terminer, si on suppose que B est un élément de $\mathscr{B}$ de rayon supérieur à $\frac{1}{2C_2}$, comme dans la preuve du Théorème 3.2.1 en prenant $p = 1$ on a $\dfrac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B|_\alpha} \leq \delta(2C_2)^{2+\alpha}|\mathbb{D}|_{\omega,\alpha}$. Ainsi,

$$m_\alpha\omega(z) = \sup_{B\in\mathscr{B}} \frac{1_B(z)}{|B|_\alpha}|B|_{\omega,\alpha} \leq \max\left(m^{-1}C^2, \delta(2C_2)^{2+\alpha}|\mathbb{D}|_{\omega,\alpha}\right) = C'_{1,\alpha}.$$

Donc $B_{1,\alpha}(\omega) = \sup_{z\in\mathbb{D}} \omega^{-1}(z)m_\alpha\omega(z) \leq m^{-1}C'_{1,\alpha}$, ce qui prouve que $\omega \in (B_{1,\alpha})$. ■

3.3 Conditions suffisantes

En vue d'établir les réciproques des Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2, nous introduisons un nouvel opérateur appelé opérateur de régularisation qui possède de bonnes propriétés. En effet, cet opérateur permet de transformer un poids de Békollé-Bonami en un poids de Muckenhoupt, puis de contrôler la norme $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ de $m_\alpha f$ par celle de $M_\alpha f$ lorsque f appartient à $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. Ce qui offre la possibilité d'utiliser les résultats relatifs aux poids de Muckenhoupt.

3.3.1 Opérateur de régularisation et ses propriétés

Pour $k > 0$ et $z \in \mathbb{D}$ on note par : $k' = \dfrac{k}{1-k}$ lorsque $k \in]0,1[$ et

$$B_k(z) = B_k(z, k(1-|z|)) = \{\xi \in \mathbb{D} : d(z,\xi) < k(1-|z|)\}.$$

Définition 3.3.1. Soit $k \in]0,1[$, on définit l'opérateur de régularisation d'ordre k noté R_k^α pour une fonction localement intégrable f et $z \in \mathbb{D}$ par :

$$R_k^\alpha f(z) := \frac{1}{|B_k(z)|_\alpha} \int_{B_k(z)} f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi).$$

Lemme 3.3.1. Soient $k \in]0, 1/2[$, z et z' appartenant à $\mathbb{D}$ tels que $z' \in B_k(z)$. Alors on a :

(1) $z \in B_{k'}(z')$ ou encore $1_{B_k(z)}(z') \leq 1_{B_{k'}(z')}(z)$;

(2) $|B_k(z)|_\alpha \simeq |B_{k'}(z')|_\alpha$;

(3) Pour $\omega \in (B_{p,\alpha})$ $(1 < p < +\infty)$ il existe deux constantes δ'_k et δ_k telles que :

$$\delta'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}\,|B_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq |B_{k'}(z')|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)\,|B_k(z)|_{\omega,\alpha}\,.$$

Preuve. (1) $d(z,z') < k(1-|z|) = k(1-|z'|+|z'|-|z|) < k(1-|z'|) + kd(z,z')$.
D'où $d(z,z') < k'(1-|z'|)$, c'est-à-dire $z \in B_{k'}(z')$. Donc $1_{B_k(z)}(z') \leq 1_{B_{k'}(z')}(z)$.

(2) D'après le Lemme 3.1.1, $|B_k(z)|_\alpha \simeq k^2(1-|z|)^{2+\alpha}$ et $|B_{k'}(z')|_\alpha \simeq k'^2(1-|z'|)^{2+\alpha}$. Il suffit de montrer que $1-|z| \simeq 1-|z'|$ pour conclure. En effet,

$1-|z| \leq 1-|z'|+d(z',z) \leq 1-|z'|+k(1-|z|)$. D'où $k(1-|z|) \leq k'(1-|z'|)$. De la même manière on a : $k'(1-|z'|) \leq \frac{k'}{1-k'}(1-|z|) = \frac{k(1-|z|)}{1-2k}$ $(1-2k>0)$. Finalement, $k(1-|z|) \leq k'(1-|z'|) \leq \frac{k(1-|z|)}{1-2k}$. En conclusion, $|B_k(z)|_\alpha \simeq |B_{k'}(z')|_\alpha$.

(3) Tout d'abord, on remarque que la boule $B_k(z)$ (respectivement $B_{k'}(z')$) est contenue dans la boule $B_2(z') = B(z', 2(1-|z'|))$ (respectivement $B_3(z) = B(z, 3(1-|z|))$). En effet, pour $\xi \in B_k(z)$, comme $z' \in B_k(z)$ on déduit que $d(z',\xi) \leq d(z',z)+d(z,\xi) < 2k(1-|z|)$. d'après (1) on a $z \in B_{k'}(z')$ avec $k' = \frac{k}{1-k}$ et donc, $1-|z| \leq 1-|z'|+|z'|-|z| \leq 1-|z'|+d(z',z) < (k'+1)(1-|z'|)$. D'où on a : $d(z',\xi) < 2k(1-|z|) < 2k(k'+1)(1-|z'|) \leq 2(1-|z'|)$ car $0<k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire que $\xi \in B_2(z')$. De même, si $\xi \in B_k(z)$, $0<k<\frac{1}{2}$ alors on a : $d(z,\xi) < 2k'(k+1)(1-|z|) < 3(1-|z|)$ c'est-à-dire que $\xi \in B_3(z)$.

D'après le Lemme 2.4.1 de la page 27, on a $B_3(z) \in \mathscr{B}$ et comme $B_k(z) \subseteq B_3(z)$ alors, en utilisant l'inégalité (2.17) avec $f = 1_{B_k(z)}$ on obtient :

$$\left(\frac{|B_k(z)|_\alpha}{|B_3(z)|_\alpha}\right)^p \leq B_{p,\alpha}(\omega)\left(\frac{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}{|B_3(z)|_{\omega,\alpha}}\right). \tag{3.16}$$

Mais, le Lemme 3.1.1 entraîne que $|B_3(z)|_\alpha \simeq |B_k(z)|_\alpha$. Ainsi, l'inégalité (3.16) entraîne qu'il existe une constante δ_k telle que $|B_3(z)|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z)|_{\omega,\alpha}$. Comme $|B_{k'}(z')|_{\omega,\alpha} \leq |B_3(z)|_{\omega,\alpha}$ alors on déduit que

$$|B_{k'}(z')|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z)|_{\omega,\alpha}.$$

En permutant les rôles de z et z' et en utilisant le fait que $B_k(z) \subseteq B_2(z')$ on déduit de façon analogue l'existence de $\delta'_k > 0$ telle que $\delta'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}|B_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq |B_{k'}(z')|_{\omega,\alpha}$. D'où on a $\delta'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}|B_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq |B_{k'}(z')|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z)|_{\omega,\alpha}$. ■

Propriété 3.3.1. Soient $k \in]0,1[$, f et g deux fonctions positives et intégrables.

(1) Il existe une constante $C_k > 0$ ne dépendant pas de f telle que

$$m_\alpha f \leq C_k m_\alpha R_k^\alpha f. \tag{3.17}$$

(2) Il existe deux constantes positives δ_1 et δ_2 indépandante de g telles que

$$m_\alpha g \leq \delta_1 R_k^\alpha m_\alpha g \leq \delta_2 m_\alpha g. \tag{3.18}$$

(3) Si $k \in]0,1/2[$, alors il existe $C>0$ ne dépendant que de α et k telle que

$$\int_{\mathbb{D}} f[R_k^\alpha g]\mathrm{d}A_\alpha \leq C\int_{\mathbb{D}}[R_{k'}^\alpha f]g\mathrm{d}A_\alpha. \tag{3.19}$$

(4) si $k \in]0,1/2[$, il existe deux constantes C_k et $C_{k'}$ telles que pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$C'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}R_k^\alpha\omega(z) \leq R_{k'}^\alpha\omega(z) \leq C_k B_{p,\alpha}(\omega)R_k^\alpha\omega(z). \tag{3.20}$$

(5) Si $k \in]0, 1/2[$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que

$$P_\alpha^+ f \leq C_k P_\alpha^+ R_k^\alpha f. \tag{3.21}$$

Preuve. (1) Soient $z \in \mathbb{D}$ et $B = B(\xi_0, r)$ un élément de $\mathscr{B}$ contenant z. Si on pose $k_1 = \dfrac{k}{k+1}$ on a $k_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ alors pour $\xi \in B$, $z' \in B_{k_1}(\xi)$ et des inégalités $1 - |\xi_0| \leq r$, $|\xi_0| - |\xi| \leq d(\xi_0, \xi) < r$ on obtient que :

$$d(z', \xi_0) \leq d(z', \xi) + d(\xi, \xi_0) < k_1(1 - |\xi_0| + |\xi_0| - |\xi|) + d(\xi, \xi_0) < (2k_1 + 1)r$$

c'est-à-dire que $z' \in B' = B(\xi_0, ar)$ avec $a = 2k_1 + 1$. Comme $k_1' = k$, alors du Lemme 3.3.1 on a : $1_{B_{k_1}(\xi)}(z') \leq 1_{B_k(z')}(\xi)$ et $|B_{k_1}(\xi)|_\alpha \simeq |B_k(z')|_\alpha$. Ainsi, $1_B(\xi)1_{B_{k_1}(\xi)}(z') \leq 1_{B'}(z')1_{B_k(z')}(\xi)$ et il existe $\delta_k > 0$ tel que $|B_k(z')|_\alpha \leq \delta_k |B_{k_1}(\xi)|_\alpha$. De plus comme $1 - |\xi_0| \leq r < ar$ car B touche le bord de $\mathbb{D}$ (voir Lemme 2.4.1 de la page 27) alors du Lemme 3.1.1 , $|B|_\alpha \simeq r^{2+\alpha} \simeq |B'|_\alpha$ c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|B'|_\alpha \leq \delta |B|_\alpha$. Comme $z \in B \subset B'$ alors, de tout ce qui précède on déduit les inégalités ci-après :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|_\alpha}\int_B f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) &= \frac{1}{|B|_\alpha}\int_B \left(\frac{1}{|B_{k_1}(\xi)|_\alpha}\int_{B_{k_1}(\xi)} \mathrm{d}A_\alpha(z')\right) f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&= \frac{1}{|B|_\alpha}\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1_B(\xi)1_{B_{k_1}(\xi)}(z')f(\xi)}{|B_{k_1}(\xi)|_\alpha}\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)\mathrm{d}A_\alpha(z') \quad \text{(d'après Fubini)} \\
&\leq \frac{\delta\delta_k}{|B'|_\alpha}\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1_{B'}(z')1_{B_k(z')}(\xi)f(\xi)}{|B_k(z')|_\alpha}\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)\mathrm{d}A_\alpha(z') \\
&= \frac{\delta\delta_k}{|B'|_\alpha}\int_{B'} R_k^\alpha f(z')\mathrm{d}A_\alpha(z') \leq \delta\delta_k m_\alpha(R_k^\alpha f)(z).
\end{aligned}$$

La boule B étant arbitrairement choisie dans $\mathscr{B}$, on déduit que $m_\alpha f(z) \leq C_k m_\alpha R_k^\alpha f(z)$ avec $C_k = \delta\delta_k$.

(2) Soient z et z' appartenant à $\mathbb{D}$ tels que $z' \in B_k(z)$, alors $z \in B_{k'}(z')$. Si on considère $B = B(\xi_0, r)$ un élément de $\mathscr{B}$ qui contient z alors comme dans la preuve de (1), on obtient que $d(z', \xi_0) < (2k+1)r$. Donc, $z' \in B' = B(\xi_0, ar)$, $|B'|_\alpha \simeq |B|_\alpha$ où $a = 2k+1$. Ainsi, il existe $\gamma_1 > 0$ tel que

$$\frac{1_B(z)}{|B|_\alpha}\int_B g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \leq \gamma_1 \frac{1_{B'}(z')}{|B'|_\alpha}\int_{B'} g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \leq \gamma_1 m_\alpha g(z').$$

Il s'en suit donc que $m_\alpha g(z) \leq \gamma_1 m_\alpha g(z')$.

De même, si B contient plutôt z' on montre également que $z \in B' = B(\xi_0, ar)$ avec $a = 2k' + 1$. Ce qui permet aussi de vérifier l'existence d'une autre constante $\gamma_2 > 0$ telle que $m_\alpha g(z') \leq \gamma_2 m_\alpha g(z)$. Par conséquent, quel que soit $z' \in B_k(z)$ on a

$m_\alpha g(z) \leq \gamma_1 m_\alpha g(z') \leq \gamma_1\gamma_2 m_\alpha g(z)$, puis en intégrant sur $B_k(z)$ et en Prennant $\delta_1 = \gamma_1$ et $\delta_2 = \gamma_1\gamma_2$ on obtient :

$$m_\alpha g(z) \leq \delta_1 R_k^\alpha m_\alpha g(z) \leq \delta_2 m_\alpha g(z).$$

(3) Il découle du Lemme 3.3.1 qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de k et α telle

que pour tous z et z' appartenant à $\mathbb{D}$ on a l'inégalité :

$$\frac{1_{B_k(z)}(z')}{|B_k(z)|_\alpha} \leq C\frac{1_{B_{k'}(z')}(z)}{|B_{k'(z')}|_\alpha}.$$

Donc en utilisant successivement cette inégalité et le théorème de Fubini, il suit que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(z)R_k^\alpha g(z)\mathrm{d}A_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{1_{B_k(z)}(z')g(z')}{|B_k(z)|_\alpha}\mathrm{d}A_\alpha(z')\right)f(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\\
&\leq C\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{f(z)1_{B_{k'}(z')}(z)}{|B_{k'}(z')|_\alpha}\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)g(z')\mathrm{d}A_\alpha(z')\\
&= C\int_{\mathbb{D}} g(z')R_{k'}^\alpha f(z')\mathrm{d}A_\alpha(z').
\end{aligned}$$

(4) Il suffit de prendre $z = z'$ dans le Lemme 3.3.1. Ce qui justifie l'existence de C_k et $C_{k'}$.

(5) Considérons $k_1 = \dfrac{k}{1+k}$ et $z \in \mathbb{D}$. Soient z' et ξ appartenant à $\mathbb{D}$ tels que $z' \in B_{k_1}(\xi)$; en utilisant (3.2) on a :

$$\begin{aligned}
|1 - z\overline{z'}| &\leq |1 - z\overline{\xi}| + |z' - \xi| \leq |1 - z\overline{\xi}| + d(z', \xi)\\
&\leq |1 - z\overline{\xi}| + k_1(1 - |\xi|) \leq (k_1 + 1)|1 - z\overline{\xi}|.
\end{aligned}$$

Donc, quel que soit $z' \in B_{k_1}(\xi)$ on a $\dfrac{1}{|1 - z\overline{\xi}|^{2+\alpha}} \leq \dfrac{(k_1+1)^{2+\alpha}}{|1 - z\overline{z'}|^{2+\alpha}}$. En intégrant sur $B_{k_1}(\xi)$, on obtient que $g(\xi) \leq (k_1+1)^{2+\alpha}R_{k_1}^\alpha g(\xi)$ avec $g(\xi) = \dfrac{1}{|1 - z\overline{\xi}|^{2+\alpha}}$. Ainsi,l'inégalité (3.19) on a :

$$\begin{aligned}
P_\alpha^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) &\leq (k_1+1)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}} f(\xi)\left[R_{k_1}^\alpha g(\xi)\right]\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\\
&\leq (k_1+1)^{2+\alpha}C_{k_1}\int_{\mathbb{D}} R_k^\alpha f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \text{ d'après } (3.17)\\
&= C_k P_\alpha^+ R_k^\alpha f(z) \quad \text{avec} \quad C_k = (k_1+1)^{2+\alpha}C_{k_1}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.2. On suppose que ω est un poids de la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami. On suppose que $k \in]0, \frac{1}{2}[$ alors, $R_k^\alpha\omega$ appartient à la classe $(A_{p,\alpha})$ de Muckenhoupt. De plus, il existe une constante indépendante de ω $C_k > 0$ telle que : $A_{p,\alpha}(R_k^\alpha(\omega)) \leq C_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2$.

Preuve. Pour simplifier les notations, nous posons $\sigma = R_k^\alpha\omega$ et considérons une boule $B = B(z_0, r)$. Supposons que B appartient à $\mathscr{B}$ car $1 - |z_0| \leq r$), nous allons montrer qu'il existe deux constantes δ_k et δ'_k telles que pour la boule $B' = B(z_0, ar) \in \mathscr{B}$ avec $a = 2k+1$ on a :

$$\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha} \leq \delta_k\frac{|B'|_{\omega,\alpha}}{|B'|_\alpha} \quad \text{et} \quad \left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq \left(\delta'_k\frac{|B'|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B'|_\alpha}\right)^{p-1}.$$

Pour la première inégalité, en utilisant le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}|B|_{\sigma,\alpha} &= \int_B \left(\frac{1}{|B_k(z)|_\alpha}\int_{B_k(z)}\omega(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)\mathrm{d}A_\alpha(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{1_{B_k(z)}(\xi)\cdot 1_B(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)}{|B_k(z)|_\alpha}\right)\omega(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi).\end{aligned}$$

Mais, on rappelle que si $z\in B$ et $\xi\in B_k(z)$ alors $z\in B_{k'}(\xi)$ et $\xi\in B'=B(z_0,ar)$ avec $a=2k+1$; c'est-à-dire $1_{B_k(z)}(\xi)\cdot 1_B(z)\leq 1_{B_{k'}(\xi)}(z)\cdot 1_{B'}(\xi)$. Par ailleurs, $|B|_\alpha\simeq|B'|_\alpha$ car $1-|z_0|\leq r\leq ar$ (voir Lemme 3.1.1) et d'après le Lemme 3.3.1 on a $|B_k(z)|_\alpha\simeq|B_{k'}(\xi)|_\alpha$. On déduit donc de ce qui précède l'existence d'une constante $C_k>0$ telle que

$$\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\leq\frac{C_k}{|B'|_\alpha}\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{1_{B_{k'}(\xi)}(z)\cdot 1_{B'}(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(z)}{|B_{k'}(\xi)|_\alpha}\right)\omega(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)=C_k\frac{|B'|_{\omega,\alpha}}{|B'|_\alpha}. \tag{3.22}$$

Par contre, pour la deuxième inégalité, en utilisant l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned}(R_k^\alpha\omega)^{1-p'}(z) &= \left(\frac{1}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\int_{B_k(z)}\omega^{\frac{1}{p}}\omega^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{p'}{p}}\\ &\leq \left(\frac{1}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\int_{B_k(z)}\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\int_{B_k(z)}\omega\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{p'}{p^2}}.\end{aligned}$$

Soit, $\sigma^{1-p'}(z)\leq\left(\frac{|B_k(z)|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}$. Puis, en appliquant de nouveau l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini, il suit que :

$$\begin{aligned}\int_B\sigma^{1-p'}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z) &\leq \int_B\left(\frac{|B_k(z)|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\omega(z)\right)^{\frac{1}{p}}\omega^{-\frac{1}{p}}(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\\ &\leq |B|^{\frac{1}{p'}}_{\omega^{1-p'},\alpha}\left(\int_B\left(\frac{1}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\int_{B_k(z)}\omega^{1-p'}(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |B|^{\frac{1}{p'}}_{\omega^{1-p'},\alpha}\left(\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{\omega(z)1_{B_k(z)}(\xi)\cdot 1_B(z)}{|B_k(z)|_{\omega,\alpha}}\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)\omega^{1-p'}(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Mais, $1_{B_k(z)}(\xi)\cdot 1_B(z)\leq 1_{B_{k'}(\xi)}(z)\cdot 1_{B'}(\xi)$ et d'après le Lemme 3.3.1 on a : $|B_{k'}(\xi)|_{\omega,\alpha}\leq\delta_kB_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z)|_{\omega,\alpha}$. Il découle donc de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha} &\leq [\delta_kB_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p}}|B|^{\frac{1}{p'}}_{\omega^{1-p'},\alpha}\left(\int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}\frac{\omega(z)1_{B_{k'}(\xi)}(z)\cdot 1_B(\xi)}{|B_{k'}(\xi)|_{\omega,\alpha}}\mathrm{d}A_\alpha(z)\right)\omega^{1-p'}(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= [\delta_kB_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p}}|B|^{\frac{1}{p'}}_{\omega^{1-p'},\alpha}|B'|^{\frac{1}{p}}_{\omega^{1-p'},\alpha}\\ &\leq [\delta_kB_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p}}|B'|_{\omega^{1-p'},\alpha}.\end{aligned}$$

D'autre part, $|B|_\alpha\simeq|B'|_\alpha$, il existe donc une constante $C'_k>0$ telle que

$$\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1}\leq C'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{|B'|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B'|_\alpha}\right)^{p-1}.$$

Par conséquent en prenant $\gamma_k = C_k C'_k$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} &\leq \gamma_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p'}}\frac{|B'|_{\omega,\alpha}}{|B'|_\alpha}\left(\frac{|B'|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B'|_\alpha}\right)^{p-1}\\ &\leq \gamma_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p'}+1} \leq \gamma_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2.\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que B est une boule éloignée du bord de $\mathbb{D}$ ($r < 1-|z_0|$). Tout d'abord, si on suppose que $\frac{1}{2}(1-|z_0|) < r < 1-|z_0|$ alors $|B|_\alpha \simeq (1-|z_0|)^{2+\alpha} \simeq |B_1(z_0)|_\alpha$. Dans ce cas il existe $\gamma'_k > 0$ tel que

$$\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \lesssim \frac{|B_1(z_0)|_{\sigma,\alpha}}{|B_1(z_0)|_\alpha}\left(\frac{|B_1(z_0)|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B_1(z_0)|_\alpha}\right)^{p-1} \leq \gamma'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2.$$

Puisque cela se ramène au cas précédent.
Enfin, si $0 < r < \frac{1}{2}(1-|z_0|)$ alors pour $z \in B$ on a les inégalités : $1-|z| < 1-|z_0|+d(z,z_0) < 2(1-|z_0|)$ et $1-|z_0| < 1-|z|+d(z_0,z) < 1-|z|+\frac{1}{2}(1-|z_0|)$. Ainsi, $1-|z| < 2(1-|z_0|)$ et $\frac{1}{2}(1-|z_0|) < 1-|z|$. Soit,

$$\frac{1}{2}(1-|z_0|) < 1-|z| < 2(1-|z_0|).$$

Ce qui entraîne que $|B_k(z_0)|_\alpha \simeq (1-|z_0|)^{2+\alpha} \simeq (1-|z|)^{2+\alpha} \simeq |B_k(z)|_\alpha$. Montrons aussi que, $|B_k(z_0)|_{\omega,\alpha} \simeq |B_k(z)|_{\omega,\alpha}$. Pour cela, prenons ξ dans $B_k(z_0)$ alors

$$d(z,\xi) \leq d(z,z_0)+d(z_0,\xi) < r+k(1-|z_0|) < (k+\frac{1}{2})(1-|z_0|) < (2k+1)(1-|z|).$$

Ainsi, la boule $B_k(z_0)$ est contenue dans la boule $\widetilde{B}_k(z) = B(z,a(1-|z|))$ où $a = 2k+1$. De la même manière, on montre que la boule $B_k(z)$ est contenue dans la boule $\widetilde{B}_k(z_0) = B(z,a(1-|z_0|))$. En plus, on montre en procédant comme dans la preuve du Lemme 3.3.2 que

$$|B_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq |\widetilde{B}_k(z_0)|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z_0)|_{\omega,\alpha} \quad \text{et} \quad |B_k(z_0)|_{\omega,\alpha} \leq |\widetilde{B}_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k'^{-1}B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z)|_{\omega,\alpha}$$

c'est-à-dire $\delta'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}|B_k(z_0)|_{\omega,\alpha} \leq |B_k(z)|_{\omega,\alpha} \leq \delta_k B_{p,\alpha}(\omega)|B_k(z_0)|_{\omega,\alpha}$. Et compte tenu du fait que $|B_k(z_0)|_\alpha \simeq |B_k(z)|_\alpha$ on déduit l'existence de deux constantes C'_k et C''_k telles que

$$C'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}R_k^\alpha\omega(z_0) \leq R_k^\alpha\omega(z) \leq C''_k B_{p,\alpha}(\omega)R_k^\alpha\omega(z_0)$$

ou encore $C'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}\sigma(z_0) \leq \sigma(z) \leq C''_k B_{p,\alpha}(\omega)\sigma(z_0)$. Ce qui implique que $|B|_{\sigma,\alpha} \leq C''_k B_{p,\alpha}(\omega)\sigma(z_0)|B|_\alpha$ et $|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha} \leq \left(C'_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^{-1}\sigma(z_0)\right)^{1-p'}|B|_\alpha$. Ainsi en prenant $\gamma''_k = C''_k C_k'^{-1}$ on a :

$$\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq \gamma''_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2.$$

Conclusion, si on prend C_k plus grand que γ_k, γ'_k et γ''_k alors on obtient que :

$$\frac{|B|_{\sigma,\alpha}}{|B|_\alpha}\left(\frac{|B|_{\sigma^{1-p'},\alpha}}{|B|_\alpha}\right)^{p-1} \leq C_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2.$$

Comme B est choisie arbitrairement, $A_{p,\alpha}(R_k^\alpha \omega) \leq C_k[B_{p,\alpha}(\omega)]^2$. ■

Théorème 3.3.1. (Muckenhoupt)
Si ω appartient à la classe $(A_{p,\alpha})$ avec $1 < p < +\infty$ alors l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood est de type (p,p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. Plus précisement il existe une constante $C(\omega)$ telle que pour tout $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ on a :

$$\|M_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C(\omega)\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Preuve. Cf [19]

Remarque 3.3.1. Le Théorème 3.3.1 reste valide pour l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood non centré (que nous notons $\tilde{M}_\alpha$), puisque M_α et $\tilde{M}_\alpha$ sont équivalentes . En effet, pour une fonction localement intégrable f,

$$\tilde{M}_\alpha f(z) = \sup_B \frac{1_B(z)}{|B|_\alpha} \int_B |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \ , \ z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que $M_\alpha f(z) \leq \tilde{M}_\alpha f(z)$.
Réciproquement, si $B = B(z_0, r)$ est une boule contenant z alors on a les inclusions $B(z_0, r) \subseteq B(z, 2r) \subseteq B(z_0, 4r)$. La propriété d'homogénéité entraîne qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|B(z,2r)|_\alpha \leq |B(z_0,4r)|_\alpha \leq \delta_0 |B(z_0,r)|_\alpha$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|_\alpha} \int_B |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi) &\leq \frac{\delta_0}{|B(z,2r)|_\alpha} \int_{B(z,2r)} |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\ &\leq \delta_0 M_\alpha f(z). \end{aligned}$$

Il s'en suit que $M_\alpha f \leq \tilde{M}_\alpha f \leq \delta_0 M_\alpha f$.

Théorème 3.3.2. Si $\omega \in (B_{p,\alpha})$ $(1 < p < +\infty)$ alors l'opérateur m_α est de type (p,p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. Plus précisement, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f dans $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C[B_{p,\alpha}(\omega)]^2 \|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Preuve. Pour simplifier les notations dans cette preuve, C désignera une constante générique ne dépendant que des constantes issues des résultats qui y seront cités. Tout d'abord, fixons $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $k \in]0, 1/2[$. Compte tenu des inégalités (3.17) et (3.18) on a les inégalités :

$$m_\alpha f \leq C m_\alpha R_k^\alpha f \leq C R_k^\alpha m_\alpha R_k^\alpha f \leq C \left(R_k^\alpha [m_\alpha R_k^\alpha f]^p\right)^{1/p}. \tag{3.23}$$

Où la dernière inégalité s'obtient de l'inégalité de Hölder de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R_k^\alpha \left(m_\alpha R_k^\alpha f\right)(z) &= \frac{1}{|B_k(z)|_\alpha} \int_{B_k(z)} 1 \cdot m_\alpha R_k^\alpha f(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\ &\leq \left(\frac{1}{|B_k(z)|_\alpha} \int_{B_k(z)} [m_\alpha R_k^\alpha f(\xi)]^p \mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|B_k(z)|_\alpha} \int_{B_k(z)} \mathrm{d}A_\alpha(z)\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(R_k^\alpha [m_\alpha R_k^\alpha f]^p(z)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

En appliquant successivement les inégalités (3.23), (3.19), (3.20) et sachant que $m_\alpha R_k^\alpha f \leq M_\alpha R_k^\alpha f$ on a :

$$\begin{aligned}\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &\leq C\int_{\mathbb{D}} R_k^\alpha[m_\alpha R_k^\alpha f]^p\omega \mathrm{d}A_\alpha\\ &\leq C\int_{\mathbb{D}}[m_\alpha R_k^\alpha f]^p R_{k'}^\alpha \omega \mathrm{d}A_\alpha\\ &\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{D}}[M_\alpha R_k^\alpha f]^p R_k^\alpha\omega \mathrm{d}A_\alpha.\end{aligned}$$

D'autre part, du Lemme 3.3.2 on a $R_k^\alpha\omega \in (A_{p,\alpha})$ alors le Théorème 3.3.1 entraîne que

$$\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{D}}[R_k^\alpha f]^p R_k^\alpha \omega \mathrm{d}A_\alpha. \tag{3.24}$$

Où la constante C ici dépend de ω. On montre comme dans l'inégalité (2.16) que

$$\left(\frac{1}{|B_k(z)|_\alpha}\int_{B_k(z)}|f(\xi)|\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)^p \leq \left(\frac{|B_k(z)|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|B_k(z)|_\alpha}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|B_k(z)|_\alpha}\int |f|^p(\xi)\omega(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\right)$$

c'est-à-dire : $[R_k^\alpha|f|]^p \leq \left(R_k^\alpha\left(\omega^{1-p'}\right)\right)^{p-1} R_k^\alpha(|f|^p\omega)$. Comme $B_k(z) \subseteq B_1(z)$ avec $B_1(z) \in \mathscr{B}$ alors on vérifie que $(R_k^\alpha(\omega^{1-p'}))^{p-1}R_k^\alpha\omega \leq CB_{p,\alpha}(\omega)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}[R_k^\alpha|f|]^p R_k^\alpha\omega \mathrm{d}A_\alpha &\leq \int_{\mathbb{D}} R_k^\alpha(|f|^p\omega)[R_k^\alpha(\omega^{1-p'})]^{p-1}R_k^\alpha\omega \mathrm{d}A_\alpha\\ &\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{D}} R_k^\alpha(|f|^p\omega)\mathrm{d}A_\alpha\\ &\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{D}}|f|^p\omega(R_{k'}^\alpha 1)\mathrm{d}A_\alpha \quad \text{(d'après (3.19))}\\ &\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

Finalement compte tenu de l'égalité (3.24) on obtient :

$$\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C[B_{p,\alpha}(\omega)]^2\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

■

3.3.2 Condition suffisante : cas $1 < p < +\infty$

Nous rappelons que le projecteur maximal de Bergman est l'opérateur défini pour une fonction f localement intégrable par :

$$P_\alpha^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}}\frac{|f(\xi)|}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\mathrm{d}A_\alpha(\xi).$$

Remarque 3.3.2. (1) Pour montrer la réciproque du Théorème 3.2.1 il suffit de le faire pour l'opérateur P_α^+.

(2) Pour $f \in L^1(\mathrm{d}A_\alpha)$ l'application $P_\alpha^+ f$ est continue sur $\mathbb{D}$ pour la métrique d. En effet, pour

$\xi \in \mathbb{D}$ fixé, l'application $z \longmapsto \dfrac{|f(\xi)|}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour la métrique d (voir inégalité (3.5)) et pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, l'application $\xi \longmapsto \dfrac{|f(\xi)|}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}}$ est intégrable car elle est majorée sur $\overline{\mathbb{D}}$ par $|f|\dfrac{1}{(1-|z|)^{2+\alpha}}$. D'où en vertu du théorème de la continuité de Lebesgue on déduit que $P_\alpha^+ f$ est continue.

Lemme 3.3.3. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables positives telles que pour tout $t>0$

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t, g(x) \le ct\}) \le a\mu(\{x \in X : f(x) > bt\}).$$

Où a, b et c sont des constantes positives telles que $a < b^p$ $(1 < p < +\infty)$ alors

$$\|f\|_p^p \le \frac{c^{-p}}{1-ab^{-p}}\|g\|_p^p.$$

Preuve. Pour tout $t>0$ on a :

$$\{x \in X : f(x) > t\} = \{x \in X : f(x) > t, g(x) \le ct\} \cup \{x \in X : g(x) > ct\}.$$

Il en découle donc de l'hypothèse que

$$pt^{p-1}\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \le apt^{p-1}\mu(\{x \in X : f(x) > bt\}) + pt^{p-1}\mu(\{x \in X : g(x) > ct\}).$$

Ce qui entraîne que $(1-ab^{-p})\|f\|_p^p \le c^{-p}\|g\|_p^p$. En effet, plus généralement, si $h \in L^p(X,\mu)$ et $\delta > 0$ alors

$$\begin{aligned}
\|h\|_p^p &= \int_X |h(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\\
&= \delta^p \int_X \left(\int_0^{\frac{|h(x)|}{\delta}} pt^{p-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \delta^p \int_X \left(\int_0^{+\infty} pt^{p-1}1_{\{|h|>\delta t\}}(x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \delta^p \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\left(\int_X 1_{\{|h|>\delta t\}}(x)\mu(x)\right)\mathrm{d}t \quad \text{d'après Fubini.}
\end{aligned}$$

D'où $\delta^{-p}\|h\|_p^p = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mu(\{x \in X : |h(x)| > \delta t\})\mathrm{d}t$. Ce qui achève la preuve. ■

Proposition 3.3.1. Soit $\beta > 0$, il existe une constante $A > 0$ telle que quels que soient $\xi \in \mathbb{D}$ $R \ge 1-|z_0|$ et une fonction f positive et localement intégrable et pour tout $z \in B(z_0,R)$:

$$R^\beta \int_{d(z_0,\xi)\ge R} \frac{f(\xi)}{d(z_0,\xi)^{2+\alpha+\beta}}\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \le Am_\alpha f(\xi).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser un argument de découpage de $\mathbb{D}\setminus\bar{B}$ en procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1.1 . D'autre part, compte tenu du Lemme 3.1.1 il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|B(z_0,2^{n+1}R)|_\alpha \le a(2^{n+1}R)^{2+\alpha}$. Ce qui justifie les inégalités ci-après :

$$
\begin{aligned}
R^\beta \int_{d(z_0,\xi)\geq R} \frac{f(\xi)}{d(z_0,\xi)^{2+\alpha+\beta}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n(2+\alpha+\beta)}R^{2+\alpha}} \int_{d(z_0,\xi)<2^{n+1}R} f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq a2^{2+\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\beta} \frac{1}{|B(z_0,2^{n+1}R)|_\alpha} \int_{B(z_0,2^{n+1}R)} f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq a2^{2+\alpha} m_\alpha f(z) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\beta} = \frac{a2^{2+\alpha}}{1-2^{-\beta}} m_\alpha f(z).
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de prendre $A = \dfrac{a2^{2+\alpha}}{1-2^{-\beta}}$ pour conclure. ■

La proposition suivante est très utile dans la preuve du résultat principale de cette section.

Proposition 3.3.2. Soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$, on pose $\sigma = R_k^\alpha \omega$ avec $k \in]0, 1/2[$. On considère la boule $B = B(z', r)$ avec $1-|z'| < cr$ et l'ensemble $Q = \left\{z \in B : 1-|z| < C_0' \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r\right\}$ où $C_0' > 0$, $0 < \gamma < 1$, $r > 0$ et $c > 0$ sont des constantes. Alors en considérant $Q' = \left\{z \in \bar{B} : 1-|z| < 2C_0' \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r\right\}$ et $\bar{B} = B(z', ar)$ avec $a = C_0' + 1$ il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ indépendante de γ telles que :

$$
|Q|_{\omega,\alpha} \leq C_1 |Q'|_{\sigma,\alpha} \quad \text{et} \quad |Q'|_\alpha \leq C_2 \gamma^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} |\bar{B}|_\alpha. \tag{3.25}
$$

Preuve. Si on pose $k_1 = \frac{k}{1+k}$ alors pour $z \in Q$ et $\xi \in B_{k_1}(z)$ on a $z \in B = B(z', r)$, $1-|z| < C_0'\gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r$ et comme $k_1' = k$ le Lemme 3.3.1 implique que $z \in B_k(\xi)$. Ainsi, on a :

$$
d(z',\xi) \leq d(z',z) + d(z,\xi) < r + k_1(1-|z|) < r + k_1 C_0' \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r < (C_0'+1)r
$$

car $0 < k_1, \gamma < 1$; d'où $\xi \in \bar{B} = B(z', ar)$ avec $a = C_0' + 1$. De plus,

$$
1-|\xi| < 1-|z| + d(z,\xi) < (k_1+1)(1-|z|) < 2C_0'\gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r
$$

car $0 < k_1 < 1$. Il suit donc que $\xi \in Q' = \left\{z \in \bar{B} : 1-|z| < 2C_0'\gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r\right\}$.

Ainsi, on a : $1_Q(z)1_{B_{k_1}(z)}(\xi) \leq 1_{Q'}(\xi)1_{B_k(\xi)}(z)$. D'après le Lemme 3.3.1 il existe $C_1 > 0$ tel que $|B_k(\xi)|_\alpha \leq C_1 |B_{k_1}(z)|_\alpha$. On déduit alors de ce qui précède que :

$$
\begin{aligned}
|Q|_{\omega,\alpha} &= \int_Q \left(\frac{\omega(z)}{|B_{k_1}(z)|_\alpha} \int_{B_{k_1}(z)} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \right) dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1_Q(z)1_{B_{k_1}(z)}(\xi)\omega(z)}{|B_{k_1}(z)|_\alpha} \mathrm{d}A_\alpha(z) \right) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1_{Q'}(\xi)1_{B_k(\xi)}(z)\omega(z)}{|B_k(\xi)|_\alpha} \mathrm{d}A_\alpha(z) \right) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&= C_1 \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1_{Q'}(\xi)}{|B_k(\xi)|_\alpha} \int_{B_k(\xi)} \omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z) \right) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&= C_1 \int_Q \sigma(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) = C_1 |Q'|_{\sigma,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Venons en à la preuve de la deuxième inégalité. Soit $z \in \bar{B}$ alors, $d(z',z) = ||z'|-|z|| + |e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}| < ar$; ce qui entraine que $||z'|-|z|| < ar$ et $|e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\varphi}| < ar$ où $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = |z'|e^{\mathrm{i}\varphi}$. De plus, comme

$1-|z'|<cr$ alors on a : $1-|z|<1-|z'|+|z'|-|z|<cr+ar<\beta_2$. Donc, si $z\in Q'$ alors en posant $\beta_1=2C_0'\gamma^{\frac{1}{2+\alpha}}r$ et $\beta_2=(c+a)r$, on a $1-|z|<\beta_1$, $1-|z|<\beta_2$ et $|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|<ar$. D'où, $Q'\subseteq\{z\in\mathbb{D}:1-|z|<\min(\beta_1,\beta_2),|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|<ar\}$. Par conséquent, en utilisant les coordonnées polaires avec $\mathrm{d}A_\alpha=\frac{\alpha+1}{\pi}(1-\rho^2)^\alpha\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|Q'|_\alpha &\leq \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{1-\rho<\min(\beta_1,\beta_2)}(1-\rho^2)^\alpha\rho\mathrm{d}\rho\int\limits_{|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|<ar}\mathrm{d}\theta\\
&\leq \frac{2^\alpha(\alpha+1)}{\pi}\int\limits_{1-\min(\beta_1,\beta_2)<\rho<1}(1-\rho)^\alpha\mathrm{d}\rho\int\limits_{|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|<ar}\mathrm{d}\theta\\
&\lesssim r[-(1-\rho)^{\alpha+1}]^1_{1-\min(\beta_1,\beta_2)}=r(\min(\beta_1,\beta_2))^{\alpha+1}\\
&\leq r\beta_1^{\alpha+1}=r(2C_0'\gamma^{\frac{1}{2+\alpha}}r)^{\alpha+1}\backsimeq r^{2+\alpha}\gamma^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}
\end{aligned}$$

c'est à dire que

$$|Q'|_\alpha\lesssim r^{2+\alpha}\gamma^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}. \tag{3.26}$$

D'autre part, comme $1-|z'|<cr$, d'après le Lemme 3.1.1, on a
$|\bar{B}|_\alpha\backsimeq(ar)^2(\max(1-|z'|,ar))^\alpha\backsimeq r^{2+\alpha}$. On déduit alors de l'inégalité (3.26) qu'il existe une constante $C_2>0$ indépendante de r telle que $|Q'|_\alpha\leq C_2\gamma^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}|\bar{B}|_\alpha$. ∎

Le résultat fondamentale de section est une conséquence du Théorème ci-après.

Théorème 3.3.3. Soit ω appartenant à la classe $(B_{p,\alpha})$ $(1<p<+\infty)$. Il existe deux constantes positives C et β telles que quels que soient γ assez petit, $\lambda>0$ et quelle que soit la fonction f positive et localement intégrable :

$$|\{z\in\mathbb{D}:P_\alpha^+f(z)>2\lambda,m_\alpha f(z)\leq\gamma\lambda\}|_{\omega,\alpha}\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta|\{z\in\mathbb{D}:P_\alpha^+f(z)>\lambda\}|_{\omega,\alpha}.$$

Preuve. Fixons $\lambda>0$, $0<\gamma<1$ et f une fonction positive localement intégrable. De la Remarque 3.3.2 on déduit que l'ensemble $E_\lambda=\{z\in\mathbb{D}:P_\alpha^+f(z)>\lambda\}$ est un ouvert de $\mathbb{D}$ pour la métrique d. Le cas où $E_\lambda=\mathbb{D}$ est immédiat ; dans le cas contraire, conformément au Lemme 1.5.2 de décomposition de Whitney, il existe $N\in\mathbb{N}^*$, $\delta>1$ et une suite de boules $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tels que :

- $E_\lambda=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}B_j$, $B_j=B(z_j,r_j)$;
- un point de E_λ ne peut appartenir à plus de N boules B_j ;
- les boules $B_j'=B(z_j,\delta r_j)$ rencontrent le complémentaire de E_λ dans $\mathbb{D}$.

Il suffit donc de prouver l'inégalité de distribution ci-après :

$$|\{z\in B:P_\alpha^+f(z)>2\lambda,m_\alpha f(z)\leq\gamma\lambda\}|_{\omega,\alpha}\leq CB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta|B|_{\omega,\alpha}, \tag{3.27}$$

où $B=B(z',r)$ est une boule de la décomposition de Whitney de E_λ. Alors il existe
$z_0\in B'=B(z',\delta r)$ tel que $P_\alpha^+f(z_0)\leq\lambda$.
On suppose qu'il existe $\xi_0\in B$ tel que $m_\alpha f(\xi_0)\leq\gamma\lambda$; puisque dans le cas contraire le membre de gauche de l'inégalité (3.27) est nul et le résultat est immédiat. Puis, considérons la boule $\widetilde{B}(z_0,R)$ où $R=\max(1-|z_0|,C_0r)$ et C_0 est une constante supérieure à δ et qui est choisie de façon à satisfaire les conditions de la Proposition 3.1.1 précisément, si C_2 et C_3 désignent les constantes de la Proposition

3.1.1, alors pour $z \in B$ et $\xi \in \mathbb{D}\backslash\widetilde{B}$, on désire avoir $C_2 d(z, z_0) < C_0 r$ et $d(z_0, \xi) \geq C_2 d(z, z_0)$. Mais, $d(z, z_0) \leq d(z, z') + d(z', z_0) < (1+\delta)r$ car $z \in B$ et $z_0 \in B'$. On peut donc prendre $C_0 = C_2(1+\delta)$; dans cette condition, quels que soient $z \in B$ et $\xi \in \mathbb{D}\backslash\widetilde{B}$, on a :

$$d(z_0, \xi) \geq R \geq C_0 r \geq C_2 d(z, z_0).$$

De plus, comme $\xi_0 \in B = B(z', r)$ et $z_0 \in B' = B(z', \delta r)$ alors, le choix de C_0 entraîne que $d(z_0, \xi_0) \leq d(z_0, z') + d(z', \xi_0) < (1+\delta)r < C_0 r$, (car $C_0 = C_2(1+\delta)$) c'est-à-dire que $\xi_0 \in \widetilde{B} = B(z_0, R)$. Ainsi, pour $z \in B$ et $\xi \in \mathbb{D}\backslash\widetilde{B}$, on a : $d(z_0, \xi) \geq C_2 d(z, z_0)$, $d(z, z_0) < \frac{C_0 r}{C_2} \leq \frac{R}{C_2}$ et $\xi_0 \in \widetilde{B}$ donc, en appliquant les Propositions 3.1.1 et 3.3.1, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{D}\backslash\widetilde{B}} \left|\frac{1}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} - \frac{1}{|1-z_0\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\right| f(\xi) dA_\alpha(\xi) &\leq C_3 d(z, z_0)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{D}\backslash\widetilde{B}} \frac{f(\xi) dA_\alpha(\xi)}{d(z_0, \xi)^{2+\alpha+\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{C_3}{\sqrt{C_2}} R^{\frac{1}{2}} \int\limits_{d(z_0,\xi)\geq R} \frac{f(\xi) dA_\alpha(\xi)}{d(z_0, \xi)^{2+\alpha+\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{AC_3}{\sqrt{C_2}} m_\alpha f(\xi_0).
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $f_1 = 1_{\widetilde{B}} f$ et $f_2 = 1_{\mathbb{D}\backslash\widetilde{B}} f$ alors on a $f = f_1 + f_2$ et on déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}
P_\alpha^+ f_2(z) &\leq \int\limits_{\mathbb{D}\backslash\widetilde{B}} \left|\frac{f(\xi) dA_\alpha(\xi)}{|1-z_0\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\right| + \int\limits_{\mathbb{D}\backslash\widetilde{B}} \left|\frac{1}{|1-z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} - \frac{1}{|1-z_0\bar{\xi}|^{2+\alpha}}\right| f(\xi) dA_\alpha(\xi) \\
&\leq P_\alpha^+ f(z_0) + A' m_\alpha f(\xi_0) \leq \lambda + A'\gamma\lambda \quad \text{où} \quad A' = \frac{AC_3}{\sqrt{C_2}},
\end{aligned}$$

et on rappelle que z_0 appartient au complémentaire de E_λ et $m_\alpha f(\xi_0) \leq \gamma\lambda$ par hypothèse. Ainsi, la sous additivité de P_α^+ entraîne que :

$$P_\alpha^+ f \leq P_\alpha^+ f_1 + P_\alpha^+ f_2 \leq P_\alpha^+ f_1 + \lambda + A'\gamma\lambda.$$

Alors pour $z \in B$ tel que $P_\alpha^+ f(z) > 2\lambda$, il vient que $P_\alpha^+ f_1(z) > (1 - A'\gamma)\lambda$. Puis, en choisissant γ tel que $0 < \gamma < \frac{1}{A'}$, on a $P_\alpha^+ f_1(z) > b\lambda$ avec $b = 1 - A'\gamma > 0$ d'où on a les inclusions,

$$\{z \in B : P_\alpha^+ f_1(z) > 2\lambda\} \subseteq \{z \in B : P_\alpha^+ f_1(z) > b\lambda, m_\alpha f(z) \leq \gamma\lambda\} \subseteq \{z \in B : P_\alpha^+ f_1(z) > b\lambda\}.$$

Donc, pour avoir l'inégalité (3.27), il suffit d'avoir l'inégalité :

$$|\{z \in B : P_\alpha^+ f_1(z) > b\lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq C B_{p,\alpha}(\omega) \gamma^\beta |B|_{\omega,\alpha}. \tag{3.28}$$

Dans l'optique de prouver l'inégalité (3.28), nous allons discuter suivant les valeurs du rayon $R = \max(1 - |z_0|, C_0 r)$ de $\widetilde{B} = B(z_0, R)$. Pour cela, on pose $E'_\lambda = \{P_\alpha^+ f_1 \geq b\lambda\} \cap B$.
Premier cas : $C_0 r \leq 1 - |z_0|$ par conséquent, $\widetilde{B} = B(z_0, 1 - |z_0|)$ et on rappelle que pour $z \in B$, on a $d(z, z_0) < (1+\delta)r = \frac{C_0 r}{C_2} < \frac{1-|z_0|}{C_2}$. D'où $1 - |z_0| \leq 1 - |z| + d(z, z_0) < \frac{1-|z_0|}{C_2} + 1 - |z|$ ou encore $1 - |z| > C'(1 - |z_0|)$ avec $C' = \frac{C_2 - 1}{C_2}$. Ainsi pour tous $z \in B$ et $\xi \in \widetilde{B}$, $|1 - z\bar{\xi}| \geq 1 - |z| > C'(1 - |z_0|)$.

Ce qui implique que pour $z \in B$,

$$P_\alpha^+ f_1(z) = \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{f(\xi)dA_\alpha(\xi)}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} < \frac{1}{(C'(1-|z_0|))^{2+\alpha}} \int\limits_{\widetilde{B}} f(\xi)dA_\alpha(\xi).$$

Mais d'après le Lemme 3.1.1 , $|\widetilde{B}|_\alpha \simeq (1-|z_0|)^{2+\alpha}$; il existe donc une constante $C'' > 0$ telle que :

$$P_\alpha^+ f_1(z) < \frac{C''}{|\widetilde{B}|_\alpha} \int\limits_{\widetilde{B}} f(\xi)dA_\alpha(\xi) \leq C'' m_\alpha f(\xi_0) \leq C''\gamma\lambda,$$

puisque $\xi_0 \in \widetilde{B}$ et par hypothèse on a $m_\alpha f(\xi_0) \leq \gamma\lambda$. En clair, si on choisit γ tel que $P_\alpha^+ f_1(z) \leq C''\gamma\lambda < b\lambda$ c'est-à-dire que $0 < \gamma < \frac{b}{C''}$ alors l'ensemble $E'_\lambda = \{P_\alpha^+ f_1 > b\lambda\} \cap B$ est vide et l'inégalité (3.28) est vérifiée. Dans la suite, on supposera donc que $0 < \gamma < \gamma_0 = \min(\frac{1}{A'}, \frac{b}{C''})$ et en conséquence il ne restera plus que le cas suivant :

Deuxième cas : $1 - |z_0| < C_0 r$. On a $\widetilde{B} = B(z_0, C_0 r)$. En vue d'appliquer la Proposition 3.3.2, montrons que E'_λ est contenu dans un sous-ensemble de la forme $Q = \{z \in B : 1 - |z| < C'_0 \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r\}$. Comme, $m_\alpha f(\xi_0) \leq \gamma\lambda$ et $\xi_0 \in \widetilde{B}$ alors pour $z \in E'_\lambda$, on a :

$$b\lambda < P_\alpha^+ f_1(z) = \int\limits_{\widetilde{B}} \frac{f(\xi)dA_\alpha(\xi)}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} < \frac{|\widetilde{B}|_\alpha}{(1-|z|)^{2+\alpha}} m_\alpha f(\xi_0) < \frac{|\widetilde{B}|_\alpha \gamma\lambda}{(1-|z|)^{2+\alpha}}.$$

De plus, il découle du Lemme 3.1.1 que $|\widetilde{B}|_\alpha \simeq (C_0 r)^{2+\alpha}$, donc il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que
$b\lambda < \frac{(\delta_1 C_0)^{2+\alpha}\gamma\lambda}{(1-|z|)^{2+\alpha}}$ c'est-à-dire que $1 - |z| < C'_0 \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r$ avec $C'_0 = \delta_1 C_0 b^{-\frac{1}{2+\alpha}}$ d'où, $E'_\lambda \subseteq Q$.

Considérons le poids régularisé défini par $\sigma = R_k^\alpha \omega$, avec $k \in]0, \frac{1}{2}[$. Il vient du Lemme 3.3.2 que, $\sigma \in (A_{p,\alpha})$ donc $\sigma \in (A_{\infty,\alpha})$ puisque $(A_{p,\alpha}) \subseteq (A_{\infty,\alpha})$.

Ce qui nous conduit à admettre le Lemme qui suit.

Lemme 3.3.4. [9] Si $\sigma \in (A_{\infty,\alpha})$ alors, il existe deux constantes positives A et β_0 telles que quels que soient la boule B et le sous-ensemble mesurable E de B on a :

$$|E|_{\sigma,\alpha} \leq A \left(\frac{|E|_\alpha}{|B|_\alpha}\right)^{\beta_0} |B|_{\sigma,\alpha}.$$

D'autre part, comme $1 - |z_0| \leq C_0 r|$ et $z_0 \in B' = B(z', \delta r)$ alors on a : $1-|z'| < 1-|z_0|+|z_0|-|z'| \leq 1 - |z_0| + d(z_0, z') < C_0 r + \delta r$ d'où $1 - |z'| < 2C_0 r$ puisque $C_0 = C_2(\delta + 1)$.

Dans la suite, C désignera une constante générique dépendant des constantes issues des résultats qui seront cités.

Compte tenu du fait que Q' est un sous ensemble mesurable de $\bar{B} = B(z', ar)$, on déduit de la Proposition 3.3.2 et du Lemme 3.3.4 les inégalités suivantes :

$$|Q|_{\omega,\alpha} \leq C|Q'|_{\sigma,\alpha} \leq C \left(\frac{|Q'|_\alpha}{|\bar{B}|_\alpha}\right)^{\beta_0} |\bar{B}|_{\sigma,\alpha} \leq C\gamma^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\beta_0} |\bar{B}|_{\sigma,\alpha}.$$

Comme E'_λ est contenu dans $Q' = \{z \in \bar{B} : 1 - |z| < C'_0 \gamma^{\frac{1}{2+\alpha}} r\}$, il suit que pour $\beta = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\beta_0$ on a :

$$|E'_\lambda|_{\omega,\alpha} \leq C\gamma^\beta |\bar{B}|_{\sigma,\alpha}. \tag{3.29}$$

On montre comme pour obtenir l'inégalité (3.22) que $|\bar{B}|_{\sigma,\alpha} \leq C|\tilde{\tilde{B}}|_{\omega,\alpha}$ avec $\tilde{\tilde{B}} = B(z', (2k+1)ar)$. Il reste nous à montrer que $|\tilde{\tilde{B}}|_{\omega,\alpha} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}$. Supposons que $r < 1 - |z'|$; comme $0 < k < \frac{1}{2}$ on déduit que :$B \subseteq \bar{B} \subseteq \tilde{\tilde{B}} = B(z', (2k+1)ar) \subseteq B_{2a}(z')$ avec $B_{2a}(z') = B(z', 2a(1 - |z'|)) \in \mathscr{B}$. En prenant $f = 1_B$ dans l'inégalité (2.17) on déduit que :

$$\left(\frac{|B|_\alpha}{|B_{2a}(z')|_\alpha} \right)^p \leq B_{p,\alpha}(\omega) \frac{|B|_{\omega,\alpha}}{|B_{2a}(z')|_{\omega,\alpha}}. \tag{3.30}$$

D'après le Lemme 3.1.1 on a :$|B|_\alpha \simeq |B_{2a}(z')|_\alpha \simeq |\tilde{\tilde{B}}|_\alpha$ car de ce qui précède on a : $r < 1 - |z'| < 2C_0 r$. Du fait que $\tilde{\tilde{B}} \subseteq B_{2a}(z')$, l'inégalité (3.30) entraîne que

$$|\tilde{\tilde{B}}|_{\omega,\alpha} \leq |B_{2a}(z')|_{\omega,\alpha} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}.$$

Maintenant, si $r \geq 1 - |z'|$ alors, le Lemme 2.4.1 de la page 27 implique que $B \in \mathscr{B}$. Ainsi, en remplaçant $B_{2a}(z')$ par $\tilde{\tilde{B}}$ dans l'inégalité (3.30) et en utilisant aussi le fait que $|B|_\alpha \simeq |\tilde{\tilde{B}}|_\alpha$ on déduit également que

$$|\tilde{\tilde{B}}|_{\omega,\alpha} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}.$$

Il découle donc, de l'inégalité (3.29) que :

$$|E'_\lambda|_{\omega,\alpha} = |\{z \in B : P^+_\alpha f_1(z) > b\lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta |B|_{\omega,\alpha}.$$

Ce qui prouve l'inégalité (3.28) ainsi que l'inégalité (3.27). Par conséquent, l'inégalité (3.27) est vérifiée pour toute boule B_j, $j \in \mathbb{N}$. D'une part, pour $z \in \mathbb{D}$ tel que $P^+_\alpha f(z) > 2\lambda$ on a : $z \in E_\lambda = \{P^+_\alpha f > \lambda\} = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B_j$. D'où, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $z \in B_j$ ce qui implique que

$$\{P^+_\alpha f > 2\lambda, m_\alpha f \leq \gamma\lambda\} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{P^+_\alpha f > 2\lambda, m_\alpha f \leq \gamma\lambda\} \bigcap B_j$$

et l'inégalité (3.27) entraîne que :

$$|\{P^+_\alpha f > 2\lambda, m_\alpha f \leq \gamma\lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |\{P^+_\alpha f > 2\lambda, m_\alpha f \leq \gamma\lambda\} \bigcap B_j|_{\omega,\alpha} \leq CB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta \sum_{j=0}^{+\infty} |B_j|_{\omega,\alpha}.$$

D'autre part, comme un point de E_λ ne peut appartenir à plus de N boules B_j, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum\limits_{j=0}^{n} 1_{B_j} \leq N 1_{\{P^+_\alpha f > \lambda\}}$; ce qui implique que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |B_j|_{\omega,\alpha} \leq N|\{P^+_\alpha f > \lambda\}|_{\omega,\alpha}.$$

Finalement, pour tout $\lambda > 0$ et $0 < \gamma < \gamma_0$ on a :

$$|\{z \in \mathbb{D} : P_\alpha^+ f(z) > 2\lambda, m_\alpha f(z) \leq \gamma\lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq C B_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta |\{z \in \mathbb{D} : P_\alpha^+ f(z) > \lambda\}|_{\omega,\alpha}.$$

■

Théorème 3.3.4. Soit $(\omega \in B_{p,\alpha})$ avec $1 < p < +\infty$. Alors, P_α^+ est de type (p, p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. De plus, le projecteur de Bergman est bien défini sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.

Preuve. Soit $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. En appliquant le Théorème 3.3.3 et le Lemme 3.3.3 on a :

$$\|P_\alpha^+ f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C'_{p,\alpha}(\omega)\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Où $C'_{p,\alpha}(\omega) = \frac{2^p\gamma^- p}{1-2^pCB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta}$ et γ est choisi tel que $1-2^pCB_{p,\alpha}(\omega)\gamma^\beta > 0$. Il découle donc du Théorème 3.3.2 que :

$$\|P_\alpha^+ f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \tilde{C}_{p,\alpha}(\omega)\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{3.31}$$

Ce qui prouve que P_α^+ est de type (p, p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ où, $\tilde{C}_{p,\alpha}(\omega) = C'_{p,\alpha}(\omega)C[B_{p,\alpha}(\omega)]^2$. D'autre part, comme $\omega^{1-p'}$ est localement intégrable puisque $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha})$ alors, pour $z \in \mathbb{D}$ il existe $r > 0$ tel que $|D(z, r)|_{\omega^{1-p'},\alpha} < +\infty$. Pour $\xi \in \mathbb{D}$, on a $1 - |z| < |1 - z\bar{\xi}|$ et comme $\frac{-p'}{p} = 1 - p'$ alors on déduit de l'inégalié de Hölder que :

$$\begin{aligned} P_\alpha^+ f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\xi)|}{|1 - z\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) &\leq \frac{1}{(1 - |z|)^{2+\alpha}} \int_{\mathbb{D}} |f(\xi)| \left(\omega(\xi)1_{D(z,r)}(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\omega(\xi)1_{D(z,r)}(\xi)\right)^{-\frac{1}{p}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}}{(1 - |z|)^{2+\alpha}} |D(z, r)|^{\frac{1}{p'}}_{\omega^{1-p'},\alpha} < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que P_α est bien défini et achève ainsi la preuve du Théorème. ■

On résume la situation dans le cas $1 < p < +\infty$ dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$ alors il y a équivalence entre :

1. P_α est bien défini et est de type (p, p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$;
2. P_α^+ est de type (p, p) sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$;
3. $\omega \in (B_{p,\alpha})$.

3.3.3 Condition suffisante : cas $p = 1$

Il suffit toujours comme dans le cas $1 < p < +\infty$ de prouver le résultat pour le projecteur maximal P_α^+. Pour cela, nous commençons d'abord par établir le théorème suivant.

Théorème 3.3.5. Soit ω un poids de la classe $(B_{1,\alpha})$. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $f \in L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$|\{z \in \mathbb{D} : m_\alpha f(z) > \lambda\}|_{\omega,\alpha} < \frac{C_1[B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}, \lambda > 0.$$

Preuve. Fixons f dans $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $\lambda > 0$ et introduisons la fonction maximale centrée définie par :

$$m'_\alpha f(z) = \sup_{r \geq 1-|z|} \frac{1}{|B(z,r)|_\alpha} \int_{B(z,r)} |f| \mathrm{d}A_\alpha.$$

On montre comme dans le cas de la fonction maximale de Hardy-Littlewood (voir Remarque 3.3.1) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C m_\alpha f \leq m'_\alpha f$ ce qui montre que,

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{D} : m_\alpha f(z) > \lambda\} \subseteq \{z \in \mathbb{D} : m'_\alpha f(z) > C\lambda\}.$$

Ainsi pour z pris dans E_λ, il existe $r_z \geq 1 - |z|$ tel que $\frac{1}{|B_z|_\alpha} \int\limits_{B_z} |f| \mathrm{d}A_\alpha > C\lambda$, avec $B_z = B(z, r_z)$. Il en résulte que : $E_\lambda \subseteq \bigcup\limits_{z \in E_\lambda} B_z$ et donc, en vertu du lemme de recouvrement de Vitali (Lemme 1.5.1), on peut extraire de E_λ une suite $\{z_j\}_{z_j \in \mathbb{N}}$ et on peut trouver une constante $\delta > 1$ telles que :

- Les boules $B_j = B(z_j, r_{z_j})$ soient deux à deux disjointes ;
- $E_\lambda \subseteq \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B'_j$ où $B'_j = B(z_j, \delta r_{z_j})$.

Puisque $r_{z_j} \geq 1 - |z_j|$, les boules B_j et B'_j étant des éléments de $\mathscr{B}$, alors on déduit des Propriétés 3.2.1 qu'il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que $|B'_j|_{\omega,\alpha} \leq \delta_1 B_{1,\alpha}(\omega) |B_j|_{\omega,\alpha}$. D'autre part pour $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$C\lambda < \frac{1}{|B_j|_\alpha} \int\limits_{B_j} |f| \mathrm{d}A_\alpha = \frac{1}{|B_j|_{\omega,\alpha}} \int\limits_{B_j} |f| \omega \omega^{-1} \frac{|B_j|_{\omega,\alpha}}{|B_j|_\alpha} \mathrm{d}A_\alpha \leq \frac{B_{1,\alpha}(\omega)}{|B_j|_{\omega,\alpha}} \int\limits_{B_j} |f| \omega \mathrm{d}A_\alpha.$$

C'est-à-dire que $|B_j|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C^{-1} B_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda} \int\limits_{B_j} |f| \omega \mathrm{d}A_\alpha$. Il en découle que :

$$\begin{aligned} |E_\lambda|_{\omega,\alpha} \leq |\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B'_j|_{\omega,\alpha} &\leq \delta_1 B_{1,\alpha}(\omega) \sum_{j=0}^{+\infty} |B_j|_{\omega,\alpha} &&\leq \frac{\delta_1 C^{-1} [B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{B_j} |f| \omega \mathrm{d}A_\alpha \\ &= \frac{\delta_1 C^{-1} [B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda} \int\limits_{\cup_{j \in \mathbb{N}} B_j} |f| \omega \mathrm{d}A_\alpha &&\leq \frac{\delta_1 C^{-1} [B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda} \|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $|E\lambda| = |\{z \in \mathbb{D} : m_\alpha f(z) > \lambda\}|_{\omega,\alpha} < \frac{C_1 [B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda} \|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$ où $C_1 = \delta C^{-1}$. ■

Proposition 3.3.3. Soit $\delta > 1$, si $B' = B(z_0, \delta r)$ désigne la δ-dilatée d'une boule $B = B(z_0, \delta r)$ alors il existe une constante $\delta_0 > 0$ qui dépend uniquement de δ et α telle que pour toute fonction g positive à support dans B et tout z dans $\mathbb{D} \setminus B'$:

$$P^+_\alpha g(z) \leq \delta_0 P^+_\alpha \widetilde{g}(z), \quad \text{où} \quad \widetilde{g}(z) = \frac{1_B(z)}{|B|_\alpha} \int\limits_B g(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi).$$

Preuve. Fixons z dans $\mathbb{D} \setminus B'$, z' et ξ dans B alors on a : $\delta r \leq d(z, z_0) \leq d(z, \xi) + d(\xi, z_0) < d(z, \xi) + r$ c'est-à-dire que $d(z, \xi) > (\delta - 1) r$. Donc, $d(z', \xi) < 2r < \frac{2}{\delta - 1} d(z, \xi) < \frac{6}{\delta - 1} |1 - z\overline{\xi}|$ (d'après (3.1)). Ainsi, pour tous $z', \xi \in B$ on a :

$$|1 - z\overline{z'}| \leq |1 - z\overline{\xi}| + |z' - \xi| \leq |1 - z\overline{\xi}| + d(z', \xi) < \left(\frac{\delta + 5}{\delta - 1}\right) |1 - z\overline{\xi}|.$$

Ce qui implique qu'en prenant $\delta_0 = \left(\frac{\delta+5}{\delta-1}\right)^{2+\alpha}$ on a :

$$\frac{1}{|1-z\overline{\xi}|^{2+\alpha}} \leq \frac{\delta_0}{|B|_\alpha} \int\limits_B \frac{\mathrm{d}A_\alpha(z')}{|1-z\overline{z'}|^{2+\alpha}}.$$

Ensuite, en intégrant par rapport à ξ et compte tenu du fait que g est à support dans B on obtient

$$\begin{aligned} P_\alpha^+ g(z) = \int\limits_B \frac{g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)}{|1-z\overline{\xi}|^{2+\alpha}} &\leq \delta_0 \int\limits_B \frac{g(\xi)}{|B|_\alpha}\Big(\int\limits_B \frac{\mathrm{d}A_\alpha(\xi)}{|1-z\overline{z'}|^{2+\alpha}}\Big) \\ &= \delta_0 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{1_B(z')}{|1-z\overline{z'}|^{2+\alpha}}\Big(\frac{1}{|B|_\alpha}\int\limits_B g(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\Big)\mathrm{d}A_\alpha(z') \\ &= \delta_0 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\widetilde{g}(z')}{|1-z\overline{z'}|^{2+\alpha}}\mathrm{d}A_\alpha(z') = \delta_0 P_\alpha^+\widetilde{g}(z). \end{aligned}$$

■

En vue d'atteindre l'objectif principal de cette partie, nous établir un découpage de type Calderòn-Zygmund d'une fonction f en bonne et mauvaise fonction.

Lemme 3.3.5. (Découpage de Calderòn-Zygmund)

Soient $k \in]0, \frac{1}{2}[$, $\lambda > 0$ et f une fonction positive localement intégrable. On suppose que $\{z \in \mathbb{D} : m_\alpha f(z) > \lambda\} \neq \mathbb{D}$. Alors on peut écrire que $f = b + m$ où b et m sont des fonctions telles que :

- $R_k^\alpha b \leq C_k\lambda$, C_k dépend uniquement de k.
- Il existe une constante $C_0 > 0$ et une famille $\mathcal{F}$ de boules presque disjointes contenue dans $\{m_\alpha f > \lambda\}$ vérifiant $r(B) \geq \frac{1}{2}d(B, \partial\mathbb{D})$ pour $B \in \mathcal{F}$, si $r(B)$ désigne le rayon de B ; en plus, $m \simeq \sum\limits_{B\in\mathcal{F}} m_B$. Où m_B est à support dans B et $\frac{1}{|B|_\alpha}\int\limits_B m_B \mathrm{d}A_\alpha \leq C_0\lambda$.

Preuve. Commençons par remarquer que l'ensemble $E_\lambda = \{z \in \mathbb{D} : m_\alpha f(z) > \lambda\}$ est ouvert de $\mathbb{D}$ pour la métrique d. En effet, pour $z \in E_\lambda$, il existe une boule $B_z \in \mathscr{B}$ telle que $\frac{1}{|B_z|_\alpha}\int\limits_{B_z} f\mathrm{d}A_\alpha > \lambda$. Pour $\xi \in B_z$, on a $m_\alpha f(\xi) \geq \dfrac{1}{|B_z|_\alpha}\displaystyle\int\limits_{B_z} f\mathrm{d}A_\alpha > \lambda$; donc $\xi \in E_\lambda$ c'est-à-dire que la boule B_z est contenue dans E_λ. Ce qui montre que E_λ est un ouvert de $\mathbb{D}$. Donc en appliquant le Lemme 1.5.2 (page 14) de décomposition de Whitney, on peut trouver un entier naturel non nul N, un réel $\delta > 1$ et une suite $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de boules avec $B_j = B(z_j, r_j)$ vérifiant :

- $E_\lambda = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j$;
- un point de E_λ ne peut appartenir à plus de N boules B_j ;
- chaque boule $B_j' = B(z_j, \delta r_j)$ rencontre le complémentaire de E_λ dans $\mathbb{D}$.

Considérons $\mathcal{F}$ comme étant la collection (éventuellement vide) de toutes les boules B_j telles que $r_j \geq \frac{1}{2}d(B_j, \partial\mathbb{D})$, $j \in \mathbb{N}$. Si on pose $F_\lambda = \{m_\alpha f \leq \lambda\} \cup \bigcup\limits_{B_j\notin\mathcal{F}} B_j$ et $F_\lambda' = \bigcup\limits_{B_j\in\mathcal{F}} B_j$ alors on a, $\mathbb{D} = F_\lambda \cup F_\lambda'$ et $F_\lambda \cap F_\lambda' = \emptyset$. On peut donc écrire que $f = b + m$ avec $b = f1_{F_\lambda}$ et $m = f1_{F_\lambda'}$. D'autre part, pour $j \in \mathbb{N}$, B_j' rencontre $\{m_\alpha f \leq \lambda\}$ en un point ξ_j. L'homogénéité de la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$ implique qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$\frac{1}{|B_j|_\alpha}\int\limits_{B_j} f1_{B_j}\mathrm{d}A_\alpha \leq \frac{C_0}{|B_j'|_\alpha}\int\limits_{B_j'} f1_{B_j}\mathrm{d}A_\alpha \leq C_0 m_\alpha f(\xi_j) \leq C_0\lambda.$$

Soit $\frac{1}{|B_j|_\alpha}\int\limits_{B_j} m_{B_j}\mathrm{d}A_\alpha \leq C_0\lambda$ où on pose $m_{B_j} = f1_{B_j}$. De plus, il résulte du fait qu'un point de E_λ ne peut appartenir à plus de N boules B_j que $\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}} f1_{B_j} \leq Nf1_{F'_\lambda}$ ou encore $\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}} m_{B_j} \leq Nm$. Ainsi, $m \leq \sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}} m_{B_j} \leq Nm$ c'est-à-dire que $m \simeq \sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}} m_{B_j}$.
Pour terminer, il reste à montrer qu'il existe une constante $C_k > 0$ telle que $R_k^\alpha b \leq C_k\lambda$. Pour ce faire, nous montrons d'abord que pour toute boule $B = B(\xi_0, r)$ appartenant à $\mathscr{B}$ on a $\frac{1}{|B|_\alpha}\int\limits_B b\mathrm{d}A_\alpha \leq C\lambda$. Si b est nulle sur B, le résultat est immédiat. Par contre, si on suppose que b est non nulle sur B alors nécessairement, il existe $\xi \in B$ tel que $1_{F_\lambda}(\xi) \neq 0$ ($F_\lambda = \{m_\alpha f \leq \lambda\} \cup \bigcup\limits_{B_j\notin\mathcal{F}} B_j$). Dans le cas où $m_\alpha f(\xi) \leq \lambda$ on a le résultat puisque $\frac{1}{|B|_\alpha}\int\limits_B b\mathrm{d}A_\alpha \leq m_\alpha f(\xi)$; sinon, il existe une boule $B_j \notin \mathcal{F}$ telle que $\xi \in B_j = B(z_j, r_j)$. Comme B'_j rencontre $\{m_\alpha f \leq \lambda\}$ alors il existe $\xi_j \in B'_j = B(z_j, \delta r_j)$ tel que $m_\alpha f(\xi_j) \leq \lambda$. Mais, comme $B_j \notin \mathcal{F}$ c'est-à-dire que $r_j < \frac{1}{2}d(B_j, \partial\mathbb{D})$ on a :

$$d(\xi_0, \xi_j) \leq d(\xi_0, \xi) + d(\xi, z_j) + d(z_j, \xi_j) < r + (1+\delta)r_j < r + \frac{(1+\delta)}{2}d(B_j, \partial\mathbb{D}).$$

On rappelle que $d(B_j, \partial\mathbb{D}) = \inf\{d(z, e^{i\theta}), e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}, z \in B_j\}$. D'où comme $\xi \in B_j$ on a $d(B_j, \partial\mathbb{D}) \leq d(e^{i\theta}, e^{i\theta}|\xi|) = 1 - |\xi|$ si $\xi = e^{i\theta}|\xi|$ ou $d(B_j, \partial\mathbb{D}) \leq d(1, 0) = 1$ si $\xi = 0$ on déduit alors que :

$$d(\xi_0, \xi_j) < r + \frac{(1+\delta)}{2}(1 - |\xi|) < r + \frac{(1+\delta)}{2}(1 - |\xi_0| + d(\xi_0, \xi)) < (2+\delta)r$$

car $1 - |\xi_0| \leq r$ et $\xi \in B$. Ainsi, $\xi_j \in B' = B(\xi_0, (2+\delta)r)$ et par homogénéité de la mesure $\mathrm{d}A_\alpha$ il existe une constante $C'_0 > 0$ telle que :

$$\frac{1}{|B|_\alpha}\int\limits_B b\mathrm{d}A_\alpha \leq \frac{C'_0}{|B'|_\alpha}\int\limits_{B'} f\mathrm{d}A_\alpha \leq C'_0 m_\alpha f(\xi_j) \leq C'_0\lambda.$$

Il en découle donc que $m_\alpha b \leq C'_0\lambda$. Comme $|B_k(z)|_\alpha \simeq |B_1(z)|_\alpha$; il existe $\delta_k > 0$ tel que :

$$R_k^\alpha b(z) = \frac{1}{|B_k(z)|_\alpha}\int_{B_k(z)} b\mathrm{d}A_\alpha \leq \frac{\delta_k}{|B_1(z)|_\alpha}\int_{B_1(z)} b\mathrm{d}A_\alpha \leq \delta_k m_\alpha b(z).$$

D'où $R_k^\alpha b \leq C_k\lambda$ avec $C_k = \delta_k C'_0$ car $m_\alpha b \leq C'_0\lambda$. ■

Regardons à présent les conséquences du choix de la famille $\mathcal{F}$ du Lemme 3.3.5.

Proposition 3.3.4. Soit $\omega \in (B_{1,\alpha})$. Si $B' = B(z_0, \delta r)$ désigne la δ-dilatée d'une boule $B(z_0, r)$ vérifiant $r \geq \frac{1}{2}d(B, \partial\mathbb{D})$ avec $\delta > 1$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de B telle que :

$$|B'|_{\omega,\alpha} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}; \quad (3.32)$$

$$|B|_{\omega,\alpha}\omega^{-1} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B|_\alpha. \quad (3.33)$$

Preuve. Si B appartient à $\mathscr{B}$ alors (3.32) découle de l'homogénéité de la mesure $\omega\mathrm{d}A_\alpha$ pour les éléments de $\mathscr{B}$ et (3.33) est immédiat par définition de $(B_{1,\alpha})$. Dans le cas où B n'appartient pas à $\mathscr{B}$ c'est-à-dire que $r < 1 - |z_0|$ alors on a $B' \subseteq B_\delta(z_0)$ avec $B_\delta(z_0) = B(z_0, \delta(1 - |z_0|))$.

Tout d'abord, montrons d'abord que $\frac{1-|z_0|}{4} < r < 1 - |z_0|$. Si $r \geq \frac{1-|z_0|}{2} > \frac{1-|z_0|}{4}$ alors le résultat est immédiat. Nous pouvons supposer que $r < \frac{1-|z_0|}{2}$, alors pour tous $z \in B$ et $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ on a les inégalités ci-après :

$$1-|z_0| < d(e^{i\theta}, z_0) \leq d(e^{i\theta}, z) + d(z, z_0) < d(e^{i\theta}, z) + r < d(e^{i\theta}, z) + \frac{1-|z_0|}{2}.$$

Il suit donc que $\frac{1-|z_0|}{2} < d(B, \partial\mathbb{D})$ et par hypothèse, $d(B, \partial\mathbb{D}) \leq 2r$. D'où $\frac{1-|z_0|}{4} < r$ et donc dans tous les cas, on a $\frac{1-|z_0|}{4} < r < 1-|z_0|$. D'après le Lemme 3.1.1, $|B|_\alpha \simeq (1-|z_0|)^{2+\alpha} \simeq |B_\delta(z_0)|_\alpha$ avec $B_\delta(z_0) = B(z_0, \delta(1-|z_0|))$. Donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|B_\delta(z_0)|_\alpha \leq C|B|_\alpha$. Mais, comme $B_\delta(z_0) \in \mathscr{B}$ et $\omega \in (B_{1,\alpha})$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$1_{B_\delta(z_0)}(z)|B_\delta(z_0)|_{\omega,\alpha} \leq \omega(z)B_{1,\alpha}(\omega)|B_\delta(z_0)|_\alpha.$$

Comme $B \subseteq B' \subseteq B_\delta(z_0)$ alors, en intégrant cette dernière inégalité sur B on obtient :

$$|B_\delta(z_0)|_{\omega,\alpha} \leq \frac{|B_\delta(z_0)|_\alpha}{|B|_\alpha} B_{1,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}$$

Ainsi comme $B' \subseteq B_\delta(z_0)$ alors on a : $|B'|_{\omega,\alpha} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B|_{\omega,\alpha}$. Ce qui prouve l'inégalité (3.32). Pour l'inégalité (3.33), compte tenu du fait que $|B_\delta(z_0)|_\alpha \leq C|B|_\alpha$ on a :

$$|B|_{\omega,\alpha}\omega^{-1} \leq \frac{|B_\delta(z_0)|_{\omega,\alpha}}{|B_\delta(z_0)|_\alpha}|B_\delta(z_0)|_\alpha\omega^{-1} \leq \omega^{-1}m_\alpha\omega|B_\delta(z_0)|_\alpha \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B|_\alpha$$

■

Théorème 3.3.6. Soit $\omega \in (B_{1,\alpha})$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout f appartenant à $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $\lambda > 0$ on a :

$$|\{z \in \mathbb{D} : P_\alpha^+ b(z) > \frac{\lambda}{2}\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{CB_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{3.34}$$

$$|\{z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{B_j \in J} B'_j : P_\alpha^+ m(z) > \frac{\lambda}{2}\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{CB_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{3.35}$$

Où $|f| = b + m$ est la décomposition obtenue au Lemme 3.3.5.

Preuve. D'après la Propriété 2.4.1, $\omega \in (B_{1,\alpha}) \subseteq (B_{2,\alpha})$ et donc il découle du Théorème 3.3.4 que P_α^+ est de type $(2,2)$ sur $L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ on en déduit que P_α^+ est de type faible $(2,2)$ sur $L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. D'où il existe $C_2 = C_{2,\alpha}(\omega) > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$|\{P_\alpha^+ f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C_2}{\lambda^2}\|f\|^2_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}, \quad \lambda > 0. \tag{3.36}$$

D'après l'inégalité (3.21) on a $P_\alpha^+ b \leq C'_k P_\alpha^+ R_k^\alpha b$ avec $k \in]0, \frac{1}{2}[$, alors des inégalités (3.36), $R_k^\alpha b \leq C_k\lambda$ (voir Lemme 3.3.4) et (3.19) il suit que :

$$\begin{array}{lll}|\{P_\alpha^+ b>\frac{\lambda}{2}\}|_{\omega,\alpha} & \leq |\{P_\alpha^+ R_k^\alpha b>\frac{\lambda}{2C_k'}\}|_{\omega,\alpha} & \leq \frac{4C_2(C_k')^2}{\lambda^2}\int_{\mathbb{D}}(R_k^\alpha b)^2\omega \mathrm{d}A_\alpha \\ & \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{D}} R_k^\alpha b\omega \mathrm{d}A_\alpha & \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{D}} bR_{k'}^\alpha\omega \mathrm{d}A_\alpha \\ & \leq C\frac{B_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\int_{\mathbb{D}} b\omega \mathrm{d}A_\alpha & \leq C\frac{B_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.\end{array}$$

C ici est une constante générique et la dernière estimation s'obtient en raison de l'appartenance de ω à $(B_{1,\alpha})$ comme suit :

$$R_{k'}^\alpha\omega(z)=\frac{|B_{k'}(z)|_{\omega,\alpha}}{|B_{k'}(z)|_\alpha}\leq C\frac{|B_1(z_0)|_{\omega,\alpha}}{|B_1(z_0)|_\alpha}<CB_{1,\alpha}(\omega)\omega(z).$$

On a ainsi prouvé l'inégalité (3.34)

Venons-en à la preuve de l'inégalité (3.35). Pour cela, nous conservons les notations du Lemme 3.3.5 en considérant

$$\widetilde{m}=\sum_{B_j\in\mathcal{F}}\widetilde{m}_{B_j} \quad \text{avec} \quad \widetilde{m}_{B_j}=\frac{1_{B_j}}{|B_j|_\alpha}\int_{B_j} m_{B_j}\mathrm{d}A_\alpha=\frac{1_{B_j}}{|B_j|_\alpha}\int_{B_j}|f|\mathrm{d}A_\alpha.$$

On sait d'après le Lemme 3.3.5 que $\widetilde{m}_{B_j}(z)\leq C_0\lambda$ et comme z ne peut appartenir à plus N boules B_j alors on déduit que $\widetilde{m}=\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}\widetilde{m}_{B_j}(z)\leq NC_0\lambda$ et par le même argument, on a $\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}|f|1_{B_j}\leq N|f|$, car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=0}^{n}|f|1_{B_j}\leq N|f|$. Ce qui justifie donc que :

$$\begin{array}{rcl}\int_{\mathbb{D}}|\widetilde{m}(z)|^2\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha & \leq & C\lambda\int_{\mathbb{D}}\widetilde{m}(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha \\ & \leq & C\lambda\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{D}}\widetilde{m}_{B_j}(z)\omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z) \\ & = & C\lambda\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{D}}\left(\frac{1_{B_j}(z)\omega(z)}{|B_j|_\alpha}\int_{B_j}|f|\mathrm{d}A_\alpha\right)\mathrm{d}A_\alpha(z) \\ & = & C\lambda\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}\int_{B_j}|f|\omega\omega^{-1}\frac{|B_j|_{\omega,\alpha}}{|B_j|_\alpha}\mathrm{d}A_\alpha \\ & \leq & C\lambda B_{1,\alpha}(\omega)\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{D}}|f|1_{B_j}\omega\mathrm{d}A_\alpha \quad (\text{d'après } 3.33) \\ & \leq & C\lambda B_{1,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{D}}|f|\omega\mathrm{d}A_\alpha.\end{array}$$

c'est-à-dire que

$$\|\widetilde{m}\|^2_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\leq C\lambda B_{1,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{3.37}$$

où C est une constante générique. Mais, d'après la Proposition 3.3.3, il existe une constante $\delta_0>0$ telle que pour tout $z\in\mathbb{D}\setminus\bigcup\limits_{B_j\in\mathcal{F}}B_j'$ on a $P_\alpha^+m_{B_j}(z)\leq\delta_0P_\alpha^+\widetilde{m}_{B_j}(z)$. Comme $m(z)\leq\sum\limits_{B_j\in\mathcal{F}}m_{B_j}(z)$, P_α^+ est sous-additif et les boules B_j sont presque disjointes il suit que :

$$P_\alpha^+m(z)\leq\delta_0\sum_{B_j\in\mathcal{F}}P_\alpha^+\widetilde{m}_{B_j}(z)\leq N\delta_0P_\alpha^+\Big(\sum_{B_j\in\mathcal{F}}\widetilde{m}_{B_j}\Big)(z).$$

D'où on a $P_\alpha^+ m(z) \leq N\delta_0 P_\alpha^+ \widetilde{m}(z)$, puis des inégalités (3.36) et (3.37) on déduit que

$$\begin{aligned}|\{z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j : P_\alpha^+ m(z) > \frac{\lambda}{2}\}|_{\omega,\alpha} &\leq |\{z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j : P_\alpha^+ \widetilde{m}(z) > \frac{\lambda}{2N\delta_0}\}|_{\omega,\alpha} \\ &\leq \frac{C_2}{\lambda}\|\widetilde{m}\|^2_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \frac{CB_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.2. Si $\omega \in (B_{1,\alpha})$ alors le projecteur de Bergman est bien définie et s'étend en un opérateur faiblement continue sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.

Preuve. Fixons $\lambda > 0$ et f dans $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ pour des raisons de commodité, nous supposons que C est une constante générique. Si $\mathbb{D} = \{m_\alpha f > \lambda\}$ alors du Théorème 3.3.5, on a

$$|\{P_\alpha^+ f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq |\{m_\alpha f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C[B_{1,\alpha}(\omega)]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \frac{C_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Dans le cas contraire, en utilisant les notations du Lemme 3.3.5 où on pose $|f| = b + m$ alors on a :

$$\{P_\alpha^+ f > \lambda\} \subseteq \{P_\alpha^+ b > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j : P_\alpha^+ m(z) > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{z \in \bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j : P_\alpha^+ m(z) > \frac{\lambda}{2}\}.$$

Comme le dernier sous ensemble est contenu dans $\bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j$ alors, des inégalités (3.34) et (3.35) il suit que :

$$|\{P_\alpha^+ f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} + \Big|\bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j\Big|_{\omega,\alpha}. \tag{3.38}$$

Les boules B_j étant presque disjointes, alors : $\sum_{B_j \in \mathcal{F}} 1_{B_j} \leq N 1_{\bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B_j}$. Puis, en consultant la preuve du Lemme 3.3.5 on note que $\{m_\alpha f > \lambda\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ ainsi on a :

$$\sum_{B_j \in \mathcal{F}} |B_j|_{\omega,\alpha} \leq N\Big|\bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B_j\Big|_{\omega,\alpha} \leq N|\{m_\alpha f > \lambda\}|_{\omega,\alpha}.$$

Mais, d'après la Proposition 3.3.4 quel que soit $B_j \in \mathcal{F}$ on a $|B'_j|_{\omega,\alpha} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|B_j|_{\omega,\alpha}$. Alors, de ceci et du Théorème 3.3.5 on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{B_j \in \mathcal{F}} B'_j\Big|_{\omega,\alpha} &\leq CB_{1,\alpha}(\omega)\sum_{B_j \in \mathcal{F}} |B_j|_{\omega,\alpha} \leq CB_{1,\alpha}(\omega)|\{m_\alpha f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \\ &\leq \frac{C[B_{1,\alpha}(\omega)]^3}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \frac{C_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

On déduit donc de l'inégalité (3.38) que : $|\{P_\alpha^+ f > \lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{C_{1,\alpha}(\omega)}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$. D'autre part, comme $\omega \in (B_{1,\alpha}) \subseteq (B_{2,\alpha})$ on déduit alors du Théorème 3.3.4 que P_α est bien défini. $\blacksquare$

On résume la situation dans le cas $p = 1$ dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.3. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$ alors il y a équivalence entre :

1. P_α est bien défini et est de type faible $(1, 1)$ sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$;
2. P_α^+ est de type faible $(1, 1)$ sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$;
3. $\omega \in (B_{1,\alpha})$.

Nous avons établi la preuve du théorème de Békollé-Bonami. Dans le cas $1 < p < +\infty$ l'inégalité (3.31) prouve la continuité du projecteur de Bergman sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ lorsque $\omega \in (B_{p,\alpha})$ sans donner une réelle précision sur la dépendance de la constante $\tilde{C}_{p,\alpha}(\omega)$ par rapport au poids ω. Au prochain chapitre, nous établirons une nouvelle preuve du Théorème 3.3.4 qui permet d'obtenir une meilleur précision de cette constante (et même de la norme du projecteur de Bergman).

⋆ ⋆ Chapitre Quatre ⋆ ⋆

Estimations optimales pour le projecteur de Bergman dans le disque unité

Dans ce chapitre, on se propose d'établir une estimation optimale du projecteur de Bergman P_α sur $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ par rapport à la caractéristique $B_{p,\alpha}(\omega)$ avec $1 < p < +\infty$ de Békollé-Bonani à une constante linéaire près. Il s'agit du résultat de Sandra-Pott et Maria Carmen Reguera [21] qui stipule que :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})} \tag{4.1}$$

où $C_{p,\alpha}$ est une constante indépendante de ω.

Pour la preuve de ce résultat, la notion de grille dyadique constitue un outil essentiel à travers lequel on définit l'opérateur dyadique qui est un opérateur équivalent au projecteur maximal de Bergman permettant ainsi d'obtenir l'estimation (4.1) dans le cas $p = 2$. Puis, nous terminons en utilisant de manière adaptée la méthode d'extrapolation de Rubio de Francia et le fait que P_α est auto-adjoint. Mais avant, nous montrons d'abord que le problème (4.1) est équivalent à celui du demi-plan complexe supérieur. Il suffira alors de le faire dans le cas $p = 2$ puisque le cas $p \neq 2$ n'en est qu'une conséquence.

4.1 Préliminaires

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ désigne le demi-plan complexe supérieur.

Proposition 4.1.1. L'application définie sur $\mathbb{H}$ par $\phi(z) = \frac{i-z}{i+z}$ est biholomorphe de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$.

Preuve. Soit $z \in \mathbb{H}$, alors on a $1 - |\phi(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|i+z|^2}$. Donc, $Im(z) > 0$ si et seulement si $|\phi(z)| < 1$ ou encore $z \in \mathbb{H}$ si et seulement si $\phi(z) \in \mathbb{D}$. On vérifie que ϕ est une application bijective de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$ dont la réciproque est définie par $\psi(\xi) = \frac{i(1-\xi)}{1+\xi}$, $\xi \in \mathbb{D}$. En outre, il est évident que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{H}$ et ψ sur $\mathbb{D}$. ■ ù

Remarque 4.1.1. On sait que le jacobien réel de la transformation conforme ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue est donné par $J(z) = |\phi'(z)|^2$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{H}$, on a

$$\mathrm{d}A_\alpha(\phi(z)) = (\alpha+1)(1-|\phi(z)|^2)^\alpha \mathrm{d}A(\phi(z)) = 2^\alpha|\phi'(z)|^{(2+\alpha)}\mathrm{d}A'_\alpha(z),$$

où $\mathrm{d}A'_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(Im(z))^\alpha \mathrm{d}A(z)$ et $\mathrm{d}A(z)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{H}$.

Théorème 4.1.1. Soient $-1 < \alpha < +\infty$, $1 < p < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{D}$. L'application $T_p : L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha) \longrightarrow L^p(\mathbb{H}, \omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)$ avec $T_p f(z) = 2^{\frac{\alpha}{p}}(\phi'(z))^{\frac{2+\alpha}{p}} f\circ\phi(z)$, $z \in \mathbb{H}$ est un isomorphisme isométrique.

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$, soit $\xi = \phi(z)$, $z \in \mathbb{H}$, en utilisant la Remarque 4.1.1 on a :

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \int_{\mathbb{H}} |f\circ\phi(z)|^p \omega\circ\phi(z) \mathrm{d}A_\alpha(\phi(z)) \\ &= \int_{\mathbb{H}} 2^\alpha |f\circ\phi(z)|^p |\phi'(z)|^{2+\alpha} \omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha(z) \\ &= \|T_p f\|^p_{L^p(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)}. \end{aligned}$$

D'où $\|f\|_{L^p(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \|T_p f\|_{L^p(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)}$ ce qui prouve que T_p est une isométrie. De plus, il est clair que T_p est linéaire et bijective dont la réciproque est définie pour $g \in L^p(\mathbb{H}, \omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)$ par :

$$T_p^{-1} g(\xi) = 2^{-\frac{\alpha}{p}}(\phi'\circ\psi(\xi))^{-\frac{2+\alpha}{p}} g\circ\psi(\xi) = 2^{-\frac{\alpha}{p}}(\psi'(\xi))^{\frac{2+\alpha}{p}} g\circ\psi(\xi), \xi \in \mathbb{D},$$

où ψ désigne la réciproque de ϕ. ■

Proposition 4.1.2. Pour $-1 < \alpha < +\infty$, si $A^2(\mathbb{H}, \mathrm{d}A'_\alpha)$ désigne l'espace de Bergman sur $\mathbb{H}$ relativement à la mesure $\mathrm{d}A'_\alpha$ alors le noyau de Bergman y est défini par

$$K'_\alpha(z,\xi) = \frac{-(-2i)^\alpha}{(z-\overline{\xi})^{2+\alpha}}, \quad z, \xi \in \mathbb{H}.$$

Preuve. Soit $f \in A^2(\mathbb{H}, \mathrm{d}A'_\alpha)$, en prenant $\omega = 1$ dans le Théorème 4.1.1, on déduit que $g = 2^{-\frac{\alpha}{2}}(\phi'\circ\psi)^{-\frac{2+\alpha}{2}} f\circ\psi \in L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ où ψ est la réciproque de ϕ et donc $g \in A^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ puisque f, ψ et ϕ' sont holomorphes. Le noyau de Bergman sur $A^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ $K_\alpha(z,\xi)$ étant reproduisant, alors pour $z \in \mathbb{H}$, en effectuant le changement de variables $v = \phi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(z))^{\frac{2+\alpha}{2}} g\circ\phi(z) \\ &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(z))^{\frac{2+\alpha}{2}} \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(\phi(z), v) \times g(v) \mathrm{d}A_\alpha(v) \\ &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(z))^{\frac{2+\alpha}{2}} \int_{\mathbb{H}} 2^\alpha K_\alpha(\phi(z), \phi(\xi)) \times (\phi'(\xi)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}} g\circ\phi(\xi) \mathrm{d}A'_\alpha(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{H}} 2^\alpha K_\alpha(\phi(z), \phi(\xi)) \times (\phi'(z)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}} f(\xi) \mathrm{d}A'_\alpha(\xi). \end{aligned}$$

On rappelle que $f(\xi) = 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(\xi))^{\frac{2+\alpha}{2}} g\circ\phi(\xi)$, $K_\alpha(\phi(z), \phi(\xi)) = \frac{1}{(1-\phi(z)\overline{\phi(\xi)})^{2+\alpha}}$ et $\phi'(z) = \frac{-2i}{(i+z)^2}$. Après calcul obtient que

$$2^\alpha K_\alpha(\phi(z), \phi(\xi)) \times (\phi'(z)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}} = \frac{-(-2i)^\alpha}{(z-\overline{\xi})^{2+\alpha}} = K'_\alpha(z,\xi).$$

De ce qui précède, pour tout $z \in \mathbb{H}$ on a $f(z) = \int_{\mathbb{H}} K'_\alpha(z,\xi) f(\xi) \mathrm{d}A'_\alpha(\xi)$. Ce qui prouve la formule de reproduction (voir (2.10) page 22). D'autre part, pour $\xi \in \mathbb{H}$ fixé, et tout $z \in \mathbb{H}$ on a :

$$\begin{aligned} K'_\alpha(z,\xi) &= 2^\alpha K_\alpha(\cdot,\phi(\xi)) \circ \phi(z) \times (\phi'(z)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}} \\ &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}} T_2 K_\alpha(\cdot,\phi(\xi))(z). \end{aligned}$$

Comme $K_\alpha(\cdot,\phi(\xi)) \in A^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ alors on déduit que $K'_\alpha(\cdot,\xi) \in A^2(\mathbb{H}, \mathrm{d}A'_\alpha)$. De plus, $K'_\alpha(z,\xi) = \overline{K'_\alpha(\xi,z)}$ et donc en vertu du Théorème 2.2.1 de la caractérisation du noyau de Bergman(voir page 22), il s'en suit que $K'_\alpha(z,\xi) = \frac{-(-2i)^\alpha}{(z-\bar{\xi})^{2+\alpha}}$ est le noyau de Bergman sur $A^2(\mathbb{H}, \mathrm{d}A'_\alpha)$. ∎

Définition 4.1.1. Pour un opérateur $T : E \longrightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés, on définit la norme de T par :

$$\|T\|_{E\to F} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F.$$

Théorème 4.1.2. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$, pour $-1 < \alpha < +\infty$, si P'_α désigne le projecteur de Bergman sur $\mathbb{H}$ relativement à la mesure $\mathrm{d}A'_\alpha$, alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ on a :

$$\|P'_\alpha(T_2 f)\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} = \|P_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

De plus, on a aussi

$$\|P_\alpha\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \|P'_\alpha\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)\to L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)}.$$

Preuve. Soit $f \in L^2(\mathbb{D}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ on a $T_2 f(\xi) = 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(\xi))^{2+\alpha} f\circ\phi(\xi)$. En remarquant comme précédemment que $K'_\alpha(z,\xi) = 2^\alpha K_\alpha(\phi(z),\phi(\xi))(\phi'(z)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}}$ alors en effectuant le changement de variables $v = \phi(\xi)$ on obtient :

$$\begin{aligned} T_2(P_\alpha f)(z) &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(\xi))^{\frac{2+\alpha}{2}}(P_\alpha f)(\phi(z)) \\ &= 2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(\xi))^{\frac{2+\alpha}{2}} \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(\phi(\xi),v) f(v) \mathrm{d}A_\alpha(v) \\ &= \int_{\mathbb{H}} \left[2^\alpha K_\alpha(\phi(z),\phi(\xi))(\phi'(z)\overline{\phi'(\xi)})^{\frac{2+\alpha}{2}}\right] \left[2^{\frac{\alpha}{2}}(\phi'(\xi))^{\frac{2+\alpha}{2}} f\circ\phi(\xi)\right] \mathrm{d}A'_\alpha(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{H}} K'_\alpha(z,\xi) T_2 f(\xi) \mathrm{d}A'_\alpha(\xi) = P'_\alpha(T_2 f)(z). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, $T_2(P_\alpha f)(z) = P'_\alpha(T_2 f)(z)$ et donc, compte tenu du Théorème 4.1.1 il s'en suit que :

$$\|P'_\alpha(T_2 f)\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} = \|T_2 P_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} = \|P_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Pour la deuxième assertion du théorème, on déduit de ce qui précède et du Théorème 4.1.1 que :

$$\begin{aligned} \|P_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \|P'_\alpha T_2 f\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} \\ &\leq \|T_2 f\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} \|P'_\alpha\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)\to L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \|P'_\alpha\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)\to L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)}. \end{aligned}$$

D'où, $\|P_\alpha\|_{L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^2(\mathbb{D},\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \|P'_\alpha\|_{L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)\to L^2(\mathbb{H},\omega\circ\phi \mathrm{d}A'_\alpha)}$. L'inégalité inverse s'obtient de la même manière. ■

4.2 Modèle dyadique du projecteur de Bergman

4.2.1 Notations et définitions

On supposera toujours $-1 < \alpha < +\infty$ et nous adopterons les nouvelles notations ci-après :

- $\mathrm{d}A_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(Im(z))^\alpha \mathrm{d}A(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} r^{\alpha+1}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ où $z = re^{i\theta} \in \mathbb{H}$ et $\mathrm{d}A$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{H}$.
- $K_\alpha(z,\xi) = \frac{-(-2i)^\alpha}{(z-\bar{\xi})^{2+\alpha}}$ et $K_\alpha^+(z,\xi) = \frac{2^\alpha}{|z-\bar{\xi}|^{2+\alpha}}$, $z,\xi \in \mathbb{H}$.
- Le projecteur de Bergman sur $\mathbb{H}$ sera noté par :

$$P_\alpha f(z) = -(-2i)^\alpha \int_{\mathbb{H}} \frac{f(\xi)}{(z-\bar{\xi})^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi), \quad z \in \mathbb{H}.$$

- Le projecteur maximal de Bergman sur $\mathbb{H}$ sera noté par :

$$P_\alpha^+ f(z) = 2^\alpha \int_{\mathbb{H}} \frac{|f(\xi)|}{|z-\bar{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi), \quad z \in \mathbb{H}.$$

- Pour $-1 < \alpha < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{H}$, $L^p(\mathbb{H}, \omega \mathrm{d}A_\alpha)$ sera noté tout simplement $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.

Définition 4.2.1. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On appelle région ou boxe de Carleson associé à I le sous-ensemble défini par : $Q_I := I \times [0, |I|]$.
Le demi-boxe de Carleson associé à I est noté $T_I := I \times]\frac{|I|}{2}, |I|]$, où $|I|$ désigne la longueur de I.

Remarque 4.2.1. (1) Par intégration on obtient

$$|I|^{2+\alpha} = \pi |Q_I|_\alpha = \pi\delta_\alpha |T_I|_\alpha \quad \text{avec} \quad \delta_\alpha = \frac{2^{1+\alpha}}{2^{1+\alpha}-1}.$$

Où $|Q_I|_\alpha = \displaystyle\int_{Q_I} \mathrm{d}A_\alpha$ et $|T_I|_\alpha = \displaystyle\int_{T_I} \mathrm{d}A_\alpha$.

(2) Les boxes de Carleson recouvrent $\mathbb{H}$ et chacun touchant sa frontière qui est $\mathbb{R}$. Nous allons donc procéder à une redéfinition de la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami et l'opérateur maximal m_α.

Définition 4.2.2. L'opérateur maximal m_α associé aux boxes de Carleson est défini pour une fonction f localement intégrable par :

$$m_\alpha f(z) := \sup_{I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ intervalle}} \frac{1_{Q_I}(z)}{|Q_I|_\alpha} \int_{Q_I} |f(\xi)| \mathrm{d}A_\alpha(\xi), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Définition 4.2.3. Soit ω un poids sur $\mathbb{H}$, on dit que ω appartient à la classe $(B_{p,\alpha})$ de Békollé-Bonami lorsque :

$$B_{p,\alpha}(\omega) := \sup_{I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ intervalle}} \frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha} \left(\frac{|Q_I|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|Q_I|_\alpha} \right)^{p-1} < +\infty.$$

Nous aurons aussi besoin de la notation qui suit :

Définition 4.2.4. Soient ω et σ deux poids sur $\mathbb{H}$, on dit que le couple (ω, σ) appartient à la classe double de Békollé-Bonami et que nous notons $(B^d_{2,\alpha})$ lorsque :

$$B^d_{2,\alpha}(\omega,\sigma) := \sup_{I\subseteq\mathbb{R}, I\ intervalle} \frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha} \cdot \frac{|Q_I|_{\sigma^{-1},\alpha}}{|Q_I|_\alpha} < +\infty.$$

4.2.2 Grille dyadique dans $\mathbb{R}$

Définition 4.2.5. De manière générale, une grille dyadique de $\mathbb{R}$ est une collection $\mathcal{D}$ d'intervalles de telle sorte que pour chaque I appartenant à $\mathcal{D}$ on a ce qui suit :

(1) L'ensemble $\mathcal{D}_I := \{J \in \mathcal{D} : |J| = |I|\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

(2) I est une réunion de deux intervalles I_- et I_+ éléments de $\mathcal{D}$ vérifiant $|I_-| = |I_+| = \frac{|I|}{2}$.

Proposition 4.2.1. Soit $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ alors la collection,

$$\mathcal{D}^\beta = \{2^j[m + (-1)^j\beta, m + 1 + (-1)^j\beta[: m, j \in \mathbb{Z}\}$$

est une grille dyadique de $\mathbb{R}$.

Preuve. Pour $m, j \in \mathbb{Z}$, notons $I^\beta_{m,j} = 2^j[m + (-1)^j\beta, m + 1 + (-1)^j\beta[$. Fixons m_0 et j_0 dans $\mathbb{Z}$ et posons $I = I^\beta_{m_0,j_0}$ alors $|I| = 2^{j_0}$; d'après la Défintion 4.2.5 on a que : $\mathcal{D}^\beta_I = \{I^\beta_{m,j_0} : m \in \mathbb{Z}\}$. Il est clair que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, I^β_{m,j_0} est non vide. Si $I^\beta_{m_1,j_0}$ et $I^\beta_{m_2,j_0}$ ont un point x en commun alors on a $2^{j_0}(m_k + (-1)^{j_0}\beta) \leq x < 2^{j_0}(m_k + 1 + (-1)^{j_0}\beta)$, où $k = 1, 2$ donc $m_1 = E(\frac{x}{2^{j_0}} - (-1)^{j_0}\beta) = m_2$. Soit, $I^\beta_{m_1,j_0} = I^\beta_{m_2,j_0}$. Où E désigne la fonction partie entière qui est caractérisée par l'inégalité $E(a) \leq a < E(a) + 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $x \in \mathbb{R}$, si on prend $m = E(\frac{x}{2^{j_0}} - (-1)^{j_0}\beta)$ alors $x \in I^\beta_{m,j_0}$. Ainsi, la famille $(I^\beta_{m,j_0})_{m\in\mathbb{Z}}$ recouvre $\mathbb{R}$ et constitue par conséquent une partition de $\mathbb{R}$.
Il reste à montrer que I est une réunion de I_- et I_+ éléments de $\mathcal{D}^\beta$ avec $|I_-| = |I_+| = \frac{|I|}{2}$. On a, $I = I^\beta_{m_0,j_0} = 2^{j_0-1}[2m_0 + (-1)^{j_0}2\beta, 2m_0 + 2 + (-1)^{j_0}2\beta[$.

- Si $\beta = 0$, alors $I = I^0_{2m_0,j_0-1} \cup I^0_{2m_0+1,j_0-1}$.
- Si $\beta = \frac{1}{3}$ et j_0 est un entier pair, alors $(-1)^{j_0-1} = -1$ et
  $I = 2^{j_0-1}[2m_0 + 1 - \frac{1}{3}, 2m_0 + 3 - \frac{1}{3}[= I^{\frac{1}{3}}_{2m_0+1,j_0-1} \cup I^{\frac{1}{3}}_{2m_0+2,j_0-1}$.
- Si $\beta = \frac{1}{3}$ et j_0 est un entier impair, alors $(-1)^{j_0-1} = 1$ et
  $I = 2^{j_0-1}[2m_0 - 1 + \frac{1}{3}, 2m_0 + 1 + \frac{1}{3}[= I^{\frac{1}{3}}_{2m_0-1,j_0-1} \cup I^{\frac{1}{3}}_{2m_0,j_0-1}$.

Dans tous les cas I est une réunion de deux intervalles appartenant à $\mathcal{D}^\beta$ chacun étant de longueur $2^{j_0-1} = \frac{|I|}{2}$. Par définitions, il suit que $\mathcal{D}^\beta$ est une grille dyadique de $\mathbb{R}$. ∎

Remarque 4.2.2. L'introduction des grilles $\mathcal{D}^0$ et $\mathcal{D}^{\frac{1}{3}}$ trouve tout son sens dans le cadre de notre travail. En effet, après l'avènement de la notion de grille dyadique qui constituait alors un outil important pour obtenir de bonnes estimations des opérateurs intégraux non-dyadiques, les harmoniciens utilisaient les grilles de manière aléatoire ce qui les obligeaient à faire des considérations probabilistes. Face à cette difficulté, dans le cas du demi-plan et même du disque (cas que nous ne présenterons pas ici), Hytönen et Pérez [17] ont démontré que les grilles dyadique $\mathcal{D}^\beta$, $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ étaient suffisantes pour remédier à ce problème.

Propriété 4.2.1. Pour $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$:

(1) La famille $\{T_I, I \in \mathcal{D}^\beta\}$ est une partition de $\mathbb{H}$.

(2) Quels que soient z et ξ appartenant à $\mathbb{H}$, la quantité

$$K_\alpha^\beta(z,\xi) = \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{|I|^{2+\alpha}} \qquad \text{est finie.}$$

Preuve. **(1)** Soit $z \in \mathbb{H}$ alors, $Im(z) > 0$ et on cherche $I \in \mathcal{D}^\beta$ tel que $z \in T_I = I\times]2^{j-1}, 2^j]$ avec $I = 2^j[m + (-1)^j\beta, m+1+(-1)^j\beta[$. Nécessairement, $Re(z) \in I$ et $2^{j-1} < Im(z) \leq 2^j$ ce qui entraîne que $-j \leq -\frac{\ln Im(z)}{\ln 2} < -j+1$ et $m \leq \frac{Re(z)}{2^j} - (-1)^j\beta < m+1$, c'est-à-dire que $j = -E\left(-\frac{\ln Im(z)}{\ln 2}\right)$ et $m = E\left(\frac{Re(z)}{2^j} - (-1)^j\beta\right)$. On a ainsi prouvé l'existence de $j, m \in \mathbb{Z}$ ainsi que l'existence de $I \in \mathcal{D}^\beta$ tel que $z \in T_I$; ce qui prouve que la famille $(T_I)_{I\in\mathcal{D}^\beta}$ recouvre $\mathbb{H}$. Par ailleurs, pour $I \in \mathcal{D}^\beta$, T_I est non vide et si T_{I_1} et T_{I_2} ont un point z en commun avec $I_k = I^\beta_{m_k,j_k}$, $k = 1,2$, alors du raisonnement précédent, on a $j_1 = -E\left(-\frac{\ln Im(z)}{\ln 2}\right) = j_2$ et $m_1 = E\left(\frac{Re(z)}{2^{j_k}} - (-1)^{j_k}\beta\right) = m_2$; d'où $I_1 = I_2$ c'est-à-dire que $T_{I_1} = T_{I_2}$. On conclut que $(T_I)_{I\in\mathcal{D}^\beta}$ est une partition de $\mathbb{H}$.

(2) Toujours avec les notations de la preuve de la Proposition 4.1.2, $\mathcal{D}^\beta = \{I^\beta_{m,j} : m, j \in \mathbb{Z}\}$ avec $|I^\beta_{m,j}| = 2^j$. On a $z \in Q_I = I \times [0, 2^j]$ avec $I = I^\beta_{m,j}$ si $j \geq \frac{\ln Im(z)}{\ln 2}$ et $Re(z) \in I$ c'est-à-dire que $j \geq j_0$ et $m = m_0$ où $j_0 = E\left(\frac{\ln Im(z)}{\ln 2}\right)$ et $m_0 = E\left(\frac{Re(z)}{2^j} - (-1)^j\beta\right)$. Ainsi, pour $I = I^\beta_{m,j}$:

$$1_{Q_I}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq j_0 \quad \text{et} \quad m = m_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} K_\alpha^\beta(z,\xi) &= \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{|I|^{2+\alpha}} = \sum_{(j,m)\in\mathbb{Z}^2, I=I^\beta_{m,j}} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{2^{(2+\alpha)j}} \\ &= \sum_{j\geq j_0} \frac{1_{Q_I}(\xi)}{2^{(2+\alpha)j}} \leq \sum_{j\geq j_0} \frac{1}{2^{(2+\alpha)j}} = \frac{2^{(-j_0+1)(2+\alpha)}}{2^{2+\alpha}-1}. \end{aligned}$$

■

Définition 4.2.6. Pour $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$, on définit le noyau dyadique positif par :

$$K_\alpha^\beta(z,\xi) := \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{|I|^{2+\alpha}}.$$

On note par Q_α^β l'opérateur intégral de noyau K_α^β appelé opérateur dyadique. Plus précisément,

$$Q_\alpha^\beta(f)(z) = \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1_{Q_I}(z)}{|I|^{2+\alpha}} \int_{Q_I} f(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) = \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \langle f, \frac{1_{Q_I}(z)}{|I|^{2+\alpha}}\rangle_\alpha 1_{Q_I(z)}.$$

4.2.3 Equivalence entre le projecteur maximal de Bergman et l'opérateur dyadique.

Lemme 4.2.1. Soit K un intervalle borné de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b avec $a \leq b$. Alors, il existe $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ et un intervalle $I \in \mathcal{D}^\beta$ tel que $K \subseteq I$ et $|I| \leq 8|K|$.

Preuve. On suppose que $|I| = 2^j$ alors il faut montrer que $2^j \leq 8|K|$ c'est-à-dire que $j - 3 \leq \frac{ln|K|}{ln2}$. Comme, $E\left(\frac{ln|K|}{ln2}\right) \leq \frac{ln|K|}{ln2} < E\left(\frac{ln|K|}{ln2}\right)+1$ alors il suffit de prendre $j = E\left(\frac{ln|K|}{ln2}\right)+3 = j_0+3$ avec $j_0 = E\left(\frac{ln|K|}{ln2}\right)$ ainsi on a : $2^{j_0} \leq |K| < 2^{j_0+1}$. Cherchons m à présent ; pour cela, supposons d'abord que l'intervalle $[a, b]$ ne contient aucun point de la forme $2^{j_0+3}m$, $m \in \mathbb{Z}$ et considérons $m_0 = E\left(\frac{a}{2^{j_0+3}}\right)$. Alors $2^{j_0+3}m_0 \leq a < 2^{j_0+3}(m_0 + 1)$ et comme $2^{j_0+3}m_0$ n'appartient pas à $[a, b]$ nécessairement, $2^{j_0+3}m_0 \leq a \leq b < 2^{j_0+3}(m_0 + 1)$; par conséquent, on a $K \subseteq [a, b] \subseteq I = [2^{j_0+3}m_0, 2^{j_0+3}(m_0 + 1)[$, avec $I \in \mathcal{D}^0$ et $|I| = 2^{j_0+3} \leq 8|K|$ puisque $2^{j_0} \leq |K| < 2^{j_0+1}$.
Maintenant, s'il existe un entier m_1 tel que $2^{j_0+3}m_1$ soit un élément de $[a, b]$ alors $[a, b]$ ne saurait contenir un point de la forme $2^{j_0+3}(m + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3})$, $m \in \mathbb{Z}$. En effet, si $2^{j_0+3}(m + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3}) \in [a, b]$ alors comme $2^{j_0+3}m_1 \in [a, b]$ on a :

$$2^{j_0+3}\left||m - m_1| - \frac{1}{3}\right| \leq 2^{j_0+3}\left|m_1 - (m + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3})\right| \leq |K| < 2^{j_0+1}.$$

Ce qui entraîne que $\left||m - m_1| - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{4}$, ce qui est impossible puisque $\left|n - \frac{1}{3}\right| \geq \frac{1}{3}$ pour tout, $n \in \mathbb{N}$. Considérons donc $m_2 = E\left(\frac{a}{2^{j_0+3}} - \frac{(-1)^{j_0+3}}{3}\right)$ alors, $2^{j_0+3}(m_2 + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3}) \leq a < 2^{j_0+3}(m_2 + 1 + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3})$ et comme $2^{j_0+3}(m_2 + 1 + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3})$ n'appartient pas à $[a, b]$, alors on déduit que
$2^{j_0+3}(m_2 + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3}) \leq a \leq b < 2^{j_0+3}(m_2 + 1 + \frac{(-1)^{j_0+3}}{3})$. Donc, $K \subseteq [a, b] \subseteq I$ où on a
$I = 2^{j+3}[m_2 + \frac{(-1)^{j+3}}{3}, m_2 + 1 + \frac{(-1)^{j+3}}{3}[$, $I \in \mathcal{D}^{1/3}$ et $|I| = 2^{j_0+3} \leq 8|K|$ car $2^{j_0} \leq |K| < 2^{j_0+1}$. ■

Théorème 4.2.1. Pour toute fonction f positive et localement intégrable sur $\mathbb{H}$ on a :

$$\gamma'_\alpha Q_\alpha(f)(z) \leq P^+_\alpha f(z) \leq \gamma_\alpha Q_\alpha(f)(z), \quad z \in \mathbb{H},$$

avec $Q_\alpha(f) = \sum\limits_{\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}} Q^\beta_\alpha(f)$, $\gamma_\alpha = \frac{32^{2+\alpha}}{4}$ et $\gamma'_\alpha = \frac{5^{-(1+\frac{\alpha}{2})}(2^{2+\alpha}-1)}{8}$. Autrement dit, l'opérateur dyadique Q_α est équivalent à P^+_α.

Preuve. Soient $z, \xi \in \mathbb{H}$ et $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$. Il suffit de montrer que :

$$\gamma'_\alpha \sum_{\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}} K^\beta_\alpha(z, \xi) \leq K^+_\alpha(z, \xi) \leq \gamma_\alpha \sum_{\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}} K^\beta_\alpha(z, \xi). \tag{4.3}$$

Commençons par le membre de gauche de l'inégalité (4.3). D'après la relation (4.2) il existe $l, s \in \mathbb{N}$ tels que pour $I = I^\beta_{m,l}$ et $J = I^\beta_{m,s}$ on a $z \in Q_I$ et $\xi \in Q_J$. En prenant $j = \max(l, s)$ on a $z, \xi \in Q_{I'}$ où $I' = I^\beta_{m,j}$. Désignons par j_0 le plus petit entier naturel tel que $z, \xi \in Q_{I_0}$ avec $|I_0| = 2^{j_0}$ alors, pour $I = I^\beta_{m,j} \in \mathcal{D}^\beta$,on a $z, \xi \in Q_I$, si $j \geq j_0$ et $m = E\left(\frac{Re(z)}{2^j} - (-1)^j\beta\right) = E\left(\frac{Re(\xi)}{2^j} - (-1)^j\beta\right)$. Donc,

$$1_{Q_I}(z) \cdot 1_{Q_I}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq j_0, \quad m = E\left(\frac{Re(z)}{2^j} - (-1)^j\beta\right) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Ainsi, il vient de (4.4) que :

$$\begin{aligned} K_\alpha^\beta(z,\xi) &= \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{|I|^{2+\alpha}} = \sum_{(j,m)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1_{Q_{I^\beta_{m,j}}}(z)\cdot 1_{Q_{I^\beta_{m,j}}}(\xi)}{2^{(2+\alpha)j}} \\ &= \sum_{j\geq j_0} \frac{1}{2^{(2+\alpha)j}} = b_\alpha 2^{-j_0(2+\alpha)} = \frac{b_\alpha}{|I_0|^{2+\alpha}}, \quad \text{avec} \quad b_\alpha = \frac{2^{2+\alpha}}{2^{2+\alpha}-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $|z-\overline{\xi}|^2 = (Re(z)-Re(\xi))^2 + (Im(z)+Im(\xi))^2 \leq 5|I_0|^2$ puisque $z,\xi\in Q_{I_0}$ c'est-à-dire $Re(z), Re(\xi)\in I_0$ et $Im(z), Im(\xi)\in[0,|I_0|]$. Ainsi,

$$K_\alpha^\beta(z,\xi) = \frac{b_\alpha}{|I_0|^{2+\alpha}} \leq 5^{1+\frac{\alpha}{2}} 2^{-\alpha} b_\alpha K_\alpha^+(z,\xi).$$

Il s'ensuit alors que $\gamma'_\alpha \sum\limits_{\beta\in\{0,\frac{1}{3}\}} K_\alpha^\beta(z,\xi) \leq K_\alpha^+(z,\xi)$ avec $\gamma'_\alpha = \frac{2^\alpha 5^{-(1+\frac{\alpha}{2})}}{2b_\alpha} = \frac{5^{-(1+\frac{\alpha}{2})}(2^{2+\alpha}-1)}{8}$.

Il reste à prouver le membre de droite de l'inégalité (4.3). Considérons $j = E\left(\frac{\ln|z-\overline{\xi}|}{\ln 2}\right)$ alors, $2^j \leq |z-\overline{\xi}| < 2^{j+1}$. Donc, $|Re(z)-Re(\xi)| \leq |z-\overline{\xi}| < 2^{j+1}$ alors en posant $a=\min(Re(z),Re(\xi))$ on a $a\leq Re(z), Re(\xi) < a+2^{j+1}$. Donc, si on pose $K=[a,a+2^{j+1}[$ alors $Re(z),Re(\xi)\in K$. On a aussi, $2^{j+1} > |z-\overline{\xi}| \geq Im(z)+Im(\xi)$ et $|K| = 2^{j+1}$, ce qui entraîne que $Im(z), Im(\xi)\in[0,|K|]$. Ainsi, on a que $z,\xi\in Q_K$. En vertu du Lemme 4.2.1, il existe $\beta\in\{0,\frac{1}{3}\}$ et $I\in\mathcal{D}^\beta$ tels que $K\subseteq I$ et $|I|\leq 8|K|$. Donc, on a $z,\xi\in Q_K\subseteq Q_I$ et $|I|\leq 8|K| = 16\times 2^j \leq 16|z-\overline{\xi}|$, ce qui implique que

$$|I|^{2+\alpha} \leq \gamma_\alpha \frac{|z-\overline{\xi}|^{2+\alpha}}{2^\alpha},$$

avec $\gamma_\alpha = \frac{32^{2+\alpha}}{4}$. Ainsi, du fait que $I\in\mathcal{D}^\beta$ et $z,\xi\in Q_I$ on déduit que :

$$K_\alpha^+(z,\xi) \leq \frac{\gamma_\alpha}{|I|^{2+\alpha}} \leq \gamma_\alpha \sum_{I\in\mathcal{D}^\beta,\beta\in\{0,\frac{1}{3}\}} \frac{1_{Q_I}(z)\cdot 1_{Q_I}(\xi)}{|I|^{2+\alpha}} = \gamma_\alpha \sum_{\beta\in\{0,\frac{1}{3}\}} K_\alpha^\beta(z,\xi).$$

■

4.3 Estimation optimale pour l'opérateur maximal m_α.

Théorème 4.3.1. [12] Soit ω une fonction positive localement intégrable sur $\mathbb{H}$. Si $m_{\omega,\alpha}$ désigne l'opérateur maximal à poids défini pour une fonction f localemnt sur $\mathbb{H}$ et $z\in\mathbb{H}$ par :

$$m_{\omega,\alpha}f(z) := \sup_{I\subset\mathbb{R},intervalle} \frac{1_{Q_I}(z)}{|Q_I|_{\omega,\alpha}} \int_{Q_I} |f|\omega dA_\alpha.$$

Alors, il existe une constante $A_{1,\alpha}$ indépendante de ω telle que quelle que soit la fonction $f\in L^1(\omega dA_\alpha)$ et pour tout $\lambda>0$ on a :

$$|\{z\in\mathbb{D}, m_{\omega,\alpha}f(z)>\lambda\}|_{\omega,\alpha} \leq \frac{A_{1,\alpha}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega dA_\alpha)}.$$

Corollaire 4.3.1. Si ω est une fonction positive localement intégrable sur $\mathbb{H}$, alors pour $1 < p < +\infty$, il existe une constante $A_{p,\alpha}$ indépendante de ω telle que :

$$\|m_{\omega,\alpha} f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq A_{p,\alpha} \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}, \quad f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha).$$

Preuve. Le Théorème 4.3.1 montre que $m_{\omega,\alpha}$ est de type faible $(1,1)$ sur $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et il est évident que $m_{\omega,\alpha}$ est de type (∞, ∞) alors compte tenu du Théorème 1.2.1 d'interpolation de Marcinkiewicz, pour tout $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ on a :

$$\|m_{\omega,\alpha} f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq A_{p,\alpha} \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \quad \text{avec} \quad A_{p,\alpha} = 2\left(\frac{A_{1,\alpha} p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Théorème 4.3.2. [18] Soient $\omega \in (B_{p,\alpha})$ $(1 < p < +\infty)$, alors il existe une constante $\delta_{p,\alpha} > 0$ indépendante de ω telle que pour toute fonction $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$\|m_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \delta_{p,\alpha} [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Preuve. Pour des raisons de commodité, posons $\sigma = \omega^{1-p'}$ ou $\omega = \sigma^{1-p}$ alors $\sigma \in (B_{p',\alpha})$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $z \in Q_I$ et $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha} \int_{Q_I} |f| \mathrm{d}A_\alpha\right)^{p-1} &= \left(\frac{|Q_I|_{\sigma,\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{|Q_I|_{\sigma,\alpha}} \int_{Q_I} |f| \mathrm{d}A_\alpha\right)^{p-1} \\
&\leq \frac{B_{p,\alpha}(\omega)}{|Q_I|_{\omega,\alpha}} |Q_I|_\alpha \left(\frac{1}{|Q_I|_{\sigma,\alpha}} \int_{Q_I} |f| \mathrm{d}A_\alpha\right)^{p-1} \\
&= \frac{B_{p,\alpha}(\omega)}{|Q_I|_{\omega,\alpha}} \int_{Q_I} \left(\frac{1_{Q_I}(\xi)}{|Q_I|_{\sigma,\alpha}} \int_{Q_I} |f| \sigma^{-1} \sigma \mathrm{d}A_\alpha\right)^{p-1} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq \frac{B_{p,\alpha}(\omega)}{|Q_I|_{\omega,\alpha}} \int_{Q_I} [m_{\sigma,\alpha}(f\sigma^{-1})]^{p-1}(\xi) \omega^{-1}(\xi) \omega(\xi) \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq B_{p,\alpha}(\omega) m_{\omega,\alpha}(g\omega^{-1})(z), \quad \text{avec} \quad g(\xi) = [m_{\sigma,\alpha}(f\sigma^{-1})]^{p-1}(\xi).
\end{aligned}$$

L'intervalle I étant choisit arbitrairement, alors comme $\frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1}$ il suit donc que :

$$m_\alpha f(z) \leq [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}} (m_{\omega,\alpha}(g\omega^{-1})(z))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ce qui implique que :

$$\|m_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq [B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'} \|m_{\omega,\alpha}(g\omega^{-1})\|^{p'}_{L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \tag{4.5}$$

Mais du Corollaire 4.3.1, on a :

$$\|m_{\omega,\alpha}\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq A_{p,\alpha} \quad \text{et} \quad \|m_{\sigma,\alpha}\|_{L^{p'}(\sigma \mathrm{d}A_\alpha) \to L^{p'}(\sigma \mathrm{d}A_\alpha)} \leq A_{p',\alpha}$$

où $A_{p,\alpha}$ et $A_{p',\alpha}$ sont des constantes indépendantes de ω. en tenant compte du fait que $p'(p-1) = p$)

on déduit les inégalités ci-après :

$$\begin{aligned}\|m_{\omega,\alpha}(g\omega^{-1})\|^{p'}_{L^{p'}(\omega dA_\alpha)} &\leq A^{p'}_{p',\alpha}\|g\omega^{-1}\|^{p'}_{L^{p'}(\omega dA_\alpha)} \quad = A^{p'}_{p',\alpha}\int_{\mathbb{H}}[m_{\sigma,\alpha}(f\sigma^{-1})]^{p'(p-1)}\omega^{1-p'}dA_\alpha \\ &= A^{p'}_{p',\alpha}\|m_{\sigma,\alpha}(f\sigma^{-1})\|^{p}_{L^p(\sigma dA_\alpha)} \leq A^{p'}_{p',\alpha}A^p_{p,\alpha}\|f\sigma^{-1}\|^p_{L^p(\sigma dA_\alpha)} \\ &= A^{p'}_{p',\alpha}A^p_{p,\alpha}\int_{\mathbb{H}}|f|^p\sigma^{1-p}dA_\alpha \quad = A^{p'}_{p',\alpha}A^p_{p,\alpha}\|f\|^p_{L^p(\omega dA_\alpha)}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour $\delta^p_{p,\alpha} = A^{p'}_{p',\alpha}A^p_{p,\alpha}$ on a :

$$\|m_{\omega,\alpha}(g\sigma^{-1})\|^{p'}_{L^{p'}(\omega dA_\alpha)} \leq \delta^p_{p,\alpha}\|f\|^p_{L^p(\omega dA_\alpha)}. \tag{4.6}$$

Comme $\frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1}$ alors les inégalités (4.5) et (4.6) entraînent que :

$$\|m_\alpha f\|_{L^p(\omega dA_\alpha)} \leq \delta_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(\omega dA_\alpha)}.$$

■

Corollaire 4.3.2. Soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$ $(1 < p < +\infty)$ alors il existe une constante $\delta'_{p,\alpha} > 0$ indépendante de ω telle que pour tout $f \in L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)$:

$$\|m_\alpha f\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)} \leq \delta'_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)}.$$

Preuve. On sait que $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha}))$ et $B_{p',\alpha}(\omega^{1-p'}) = [B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'-1}$ avec $1 < p' < +\infty$; d'après le Théorème 4.3.2 il existe une constante $\delta'_{p,\alpha} > 0$ indépendante de ω telle que :

$$\|m_\alpha f\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)} \leq \delta'_{p,\alpha}[B_{p',\alpha}(\omega^{1-p'})]^{\frac{1}{p'-1}}\|f\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)} = \delta'_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}dA_\alpha)}.$$

■

4.4 Méthode d'extrapolation de Rubio de Francia

Dans cette partie, nous adaptons la méthode d'extrapolation de Rubio de Francia (voir [10, 11]). Nous y supposons que : $p > 2$, $q = \frac{p}{2} > 1$, $\phi(p) = \frac{p-2}{p-1}$ et q' est l'exposant conjugué de q où $q' = \frac{q}{q-1} = \frac{p'}{\phi(p)}$.

4.4.1 Opérateurs $S_{\omega,\alpha}$ et $D_{\omega,\alpha}$

Soit ω un poids sur $\mathbb{H}$, nous définissons les opérateurs à poids $S_{\omega,\alpha}$ et $D_{\omega,\alpha}$ respectivement sur $L^{q'}(\omega dA_\alpha)$ par :

$$S_{\omega,\alpha}(h) = \left(\frac{m_\alpha(|h|^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)}{\omega}\right)^{\phi(p)} \quad \text{et} \quad D_{\omega,\alpha}(h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{S^n_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n},$$

où $S^0_{\omega,\alpha}(h) = |h|$, $S^n_{\omega,\alpha}(h) = S_{\omega,\alpha} \circ S^{n-1}_{\omega,\alpha}(h)$ pour $n \geq 1$ et on note $\|S_{\omega,\alpha}\| = \|S_{\omega,\alpha}\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$. Ces opérateurs possèdent les propriétés suivantes :

Propriété 4.4.1. Soient $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.

(1) $S_{\omega,\alpha}$ et $D_{\omega,\alpha}$ sont des opérateurs sous-additifs.

(2) $\|S_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq [\delta_{p',\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)} \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$.

(3) $\|D_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq 2\|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$.

(4) $|h| \leq D_{\omega,\alpha}(h)$.

(5) $S_{\omega,\alpha}(D_{\omega,\alpha}(h)) \leq 2\|S_{\omega,\alpha}\| D_{\omega,\alpha}(h)$.

Preuve. (1) Soient $h_1, h_2 \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$; soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{\phi(p)} > 1$, on déduit de l'inégalité de Minkowski que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} |h_1+h_2|^{\frac{1}{\phi(p)}} \omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)} &\leq \left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} |h_1|^{\frac{1}{\phi(p)}} \omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)} + \left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} |h_2|^{\frac{1}{\phi(p)}} \omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)} \\
&\leq m_\alpha(|h_1|^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)^{\phi(p)} + m_\alpha(|h_2|^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)^{\phi(p)} \\
&= \omega^{\phi(p)}(S_{\omega,\alpha}(h_1) + S_{\omega,\alpha}(h_2)).
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, il s'en suit que : $S_{\omega,\alpha}(h_1+h_2) \leq S_{\omega,\alpha}(h_1) + S_{\omega,\alpha}(h_2)$. Puis, en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ on a : $S^n_{\omega,\alpha}(h_1+h_2) \leq S^n_{\omega,\alpha}(h_1) + S^n_{\omega,\alpha}(h_2)$ et par conséquent on déduit que : $D_{\omega,\alpha}(h_1+h_2) \leq D_{\omega,\alpha}(h_1) + D_{\omega,\alpha}(h_2)$.

(2) Comme $p' = q'\phi(p)$ alors du Corollaire 4.3.2, il suit que :

$$\begin{aligned}
\|S_{\omega,\alpha}(h)\|^{q'}_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \int_{\mathbb{H}} \left[\frac{m_\alpha(|h|^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)}{\omega}\right]^{q'\phi(p)} \omega \mathrm{d}A_\alpha = \|m_\alpha(|h|^{\frac{1}{\phi(p)}})\|^{p'}_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)} \\
&\leq [\delta_{p',\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'} \||h|^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega\|^{p'}_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)} = [\delta_{p',\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^{p'} \int_{\mathbb{H}} |h|^{q'} \omega \mathrm{d}A_\alpha.
\end{aligned}$$

Donc, $\|S_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq [\delta_{p',\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)} \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$ ce qui signifie que alors que : $\|S_{\omega,\alpha}\| \leq [\delta_{p',\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)}$.

(3) On sait que :

$$\|S_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \|S_{\omega,\alpha}\| \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Ainsi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on déduit que :

$$\|S^n_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \|S_{\omega,\alpha}\|^n \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.7}$$

Par conséquent, on déduit de la continuité de la norme $\|\cdot\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$ et de (4.7) que :

$$\begin{aligned}
\|D_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \lim_{k \to +\infty} \left\|\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \frac{S^n_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n}\right\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \\
&\leq \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \frac{\|S^n_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n} \\
&\leq \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.
\end{aligned}$$

(4) Découle de la définition de $D_{\omega,\alpha}$.

(5) Soit I un intervalle, considérons $g = D_{\omega,\alpha}(h)$ et $g_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \frac{S^n_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n}$, $k \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{g_k\}_k$ est une suite croissante et positive de fonctions mesurables qui converge simplement vers g. Du théorème de Beppo-Levi, on déduit que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} g^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)} &= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} g_k^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)} \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} m_\alpha(g_k^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega) = \omega^{\phi(p)} \lim_{k\to+\infty} S_{\omega,\alpha}(g_k).\end{aligned}$$

Il s'en suit donc que : $S_{\omega,\alpha}(g) \leq \lim_{k\to+\infty} S_{\omega,\alpha}(g_k)$. Il découle de la sous-additivité de $S_{\omega,\alpha}$ que :

$$\begin{aligned}S_{\omega,\alpha}(g) &\leq \lim_{k\to+\infty} S_{\omega,\alpha}(g_k) \qquad = \lim_{k\to+\infty} S_{\omega,\alpha}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^n}\frac{S^n_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n}\right) \\ &\leq \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^n}\frac{S^{n+1}_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^n} = 2\|S_{\omega,\alpha}\|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{S^{n+1}_{\omega,\alpha}(h)}{\|S_{\omega,\alpha}\|^{n+1}} \\ &\leq 2\|S_{\omega,\alpha}\| D_{\omega,\alpha}(h).\end{aligned}$$

Comme $g = D_{\omega,\alpha}(h)$ alors on déduit que : $S_{\omega,\alpha}(D_{\omega,\alpha}(h)) \leq 2\|S_{\omega,\alpha}\| D_{\omega,\alpha}(h)$. ■

Nous allons montrer qu'on peut obtenir d'un poids de la classe $(B_{p,\alpha})$ avec $p > 2$ un poids de la classe $(B_{2,\alpha})$ via l'opérateur $D_{\omega,\alpha}$.

Théorème 4.4.1. Soient $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ une fonction positive, alors :

$$B^d_{2,\alpha}(h\omega, S_{\omega,\alpha}(h)\omega) \leq [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Preuve. Soit I un intervalle. On sait que $\phi(p) = \frac{p-2}{p-1}$ ou $\phi(p) + \frac{1}{p-1} = 1$ alors de l'inégalité de Hölder,

$$\int_{Q_I} h\omega \mathrm{d}A_\alpha = \int_{Q_I} h\omega^{\phi(p)}\omega^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}A_\alpha \leq \left(\int_{Q_I} h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)}\left(\int_{Q_I}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'où

$$\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h\omega \mathrm{d}A_\alpha \leq \left(\frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\phi(p)}. \tag{4.8}$$

D'autre part, en remarquant que $\phi(p) - 1 = 1 - p'$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{Q_I}[S_{\omega,\alpha}(h)\omega]^{-1}\mathrm{d}A_\alpha &= \int_{Q_I}\left(\frac{m_\alpha(h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)}{\omega}\right)^{-\phi(p)}\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha = \int_{Q_I}[m_\alpha(h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega)]^{-\phi(p)}\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{-\phi(p)}\left(\int_{Q_I}\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha\right).\end{aligned}$$

Car $m_\alpha(h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega) \geq \frac{1_{Q_I}}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha$. Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I}[S_{\omega,\alpha}(h)\omega]^{-1}\mathrm{d}A_\alpha \leq \left(\frac{|Q_I|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h^{\frac{1}{\phi(p)}}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{-\phi(p)}. \tag{4.9}$$

Il découle des inégalités (4.8) et (4.9) que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} h\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I}[S_{\omega,\alpha}(h)\omega]^{-1}\mathrm{d}A_\alpha\right) &\leq \left[\frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\left(\frac{|Q_I|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}\\ &\leq [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

L'intervalle I étant arbitraire, alors il s'ensuit que $B^d_{2,\alpha}(h\omega, S_{\omega,\alpha}(h)\omega) \leq [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}}$. ■

Corollaire 4.4.1. Soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$ alors pour tout $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $D_{\omega,\alpha}(h)\omega \in (B_{2,\alpha})$. En outre,

$$B_{2,\alpha}(D_{\omega,\alpha}(h)\omega) \leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega);$$

où $\widetilde{\delta}_{p,\alpha}$ est une constante indépendante de ω.

Preuve. Soit $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, posons $g = D_{\omega,\alpha}(h)$. Alors en appliquant successivement les alinéas (5) et (2) de la propriété 4.4.1 on obtient

$$S_{\omega,\alpha}(g) \leq 2\|S_{\omega,\alpha}\|D_{\omega,\alpha}(h) \leq 2[\delta_{p',\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)}D_{\omega,\alpha}(h).$$

Soit,

$$g^{-1} \leq 2[\delta_{p',\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)}[S_{\omega,\alpha}(g)]^{-1}. \tag{4.10}$$

Ainsi, si I est un intervalle $\mathbb{R}$ alors on déduit de (4.10) que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} g\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I}(g\omega)^{-1}\mathrm{d}A_\alpha\right) &\leq 2[\delta_{p',\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)}\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I} g\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)\\ &\quad\left(\frac{1}{|Q_I|_\alpha}\int_{Q_I}(S_{\omega,\alpha}(g)\omega)^{-1}\mathrm{d}A_\alpha\right)\\ &\leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)}B^d_{2,\alpha}(g\omega, S_{\omega,\alpha}(g)\omega)\\ &\leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\phi(p)+\frac{1}{p-1}}\\ &= \widetilde{\delta}_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega), \quad \text{avec} \quad \widetilde{\delta}_{p,\alpha} = 2(\delta_{p',\alpha})^{\phi(p)}.\end{aligned}$$

Où la troisième inégalité découle du Théorème 4.4.1 du fait que $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ entraîne que $g = D_{\omega,\alpha}(h) \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. Donc en passant à la borne supérieure sur les intervalles, il suit que :

$$B_{2,\alpha}(g\omega) \leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega) \quad \text{ou} \quad B_{2,\alpha}(D_{\omega,\alpha}(h)\omega) \leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega).$$ ■

4.4.2 Résultat principal

Commençons d'abord par une adaptation du théorème de représentation de Riesz.

Lemme 4.4.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, si $g \in L^p(X, \mu)$ $(p > 2)$ alors :

$$\|g\|_p^2 = \sup_{h \geq 0, \|h\|_{q'}=1} \int_X |g|^2 h \mathrm{d}\mu.$$

Preuve. Comme $q = \frac{p}{2} > 1$, alors d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $h \in L^{q'}(X, \mu)$ tel que $h \geq 0$, $\|h\|_{q'} = 1$ on a :

$$\int_X |g|^2 h \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |g|^{2q} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |h|^{q'} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q'}} = \|g\|_p^2 \|h\|_{q'} = \|g\|_p^2.$$

Puis, en supposant que $\|g\|_p \neq 0$: considérons $h = (|g|\|g\|_p^{-1})^{2(q-1)} = (|g|\|g\|_p^{-1})^{p-2}$. Alors, $h^{q'} = (|g|\|g\|_p^{-1})^p$ (car $2q'(q-1) = 2q = p$) ; d'où $\|h\|_{q'} = 1$. Par ailleurs, $|g|^2 h = \|g\|_p^2 (|g|\|g\|_p^{-1})^p = \|g\|_p^2 h^{q'}$; ce qui implique que :

$$\int_X |g|^2 h \mathrm{d}\mu = \|g\|_p^2 \|h\|_{q'}^{q'} = \|g\|_p^2.$$

Ce qui achève la preuve du résultat annoncé. ■

Nous pouvons maintenant établir un résultat important relatif à la méthode d'extrapolation de Rubio de Francia.

Théorème 4.4.2. (Extrapolation de Rubio de Francia) Soit T un opérateur défini sur L^p. On suppose qu'il existe une constante $C_{2,\alpha} > 0$ telle que :

$$\|T\|_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{2,\alpha} B_{2,\alpha}(\omega), \quad \text{pour tout} \quad \omega \in (B_{2,\alpha}).$$

Alors, quel que soit $p > 2$ il existe une constante $C_{p,\alpha} > 0$ telle que :

$$\|T\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha} B_{p,\alpha}(\omega), \quad \text{pour tout} \quad \omega \in (B_{p,\alpha}).$$

Preuve. Supposons qu'une telle constante $C_{2,\alpha}$ existe. Soient $p > 2$, $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$. D'après le Corollaire 4.4.1, pour $h \in L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $h \geq 0$ on a $\omega' = D_{\omega,\alpha}(h)\omega \in (B_{2,\alpha})$ et on a $B_{2,\alpha}(\omega') \leq \widetilde{\delta}_{p,\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)$. Comme $h \leq D_{\omega,\alpha}(h)$ alors on déduit de l'hypothèse que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}} |Tf|^2 h \omega \mathrm{d}A_\alpha &\leq \int_{\mathbb{H}} |Tf|^2 D_{\omega,\alpha}(h) \omega \mathrm{d}A_\alpha \\
&= \|Tf\|_{L^2(\omega' \mathrm{d}A_\alpha)}^2 \\
&\leq [C_{2,\alpha} B_{2,\alpha}(\omega')]^2 \|f\|_{L^2(\omega' \mathrm{d}A_\alpha)}^2 \\
&\leq [C_{2,\alpha} \widetilde{\delta}_{p,\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^2 \|f\|_{L^2(\omega' \mathrm{d}A_\alpha)}^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\int_{\mathbb{H}} |Tf|^2 h \omega \mathrm{d}A_\alpha \leq [C_{2,\alpha} \widetilde{\delta}_{p,\alpha} B_{p,\alpha}(\omega)]^2 \|f\|_{L^2(\omega' \mathrm{d}A_\alpha)}^2. \tag{4.11}$$

D'autre part, il découle de l'alinéa (3) des Propriétés 4.4.1 que $D_{\omega,\alpha}$ est borné sur $L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ de norme inférieure à 2 et donc en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\omega' \mathrm{d}A_\alpha)} &= \int_{\mathbb{H}} |f|^2 D_{\omega,\alpha}(h)\omega \mathrm{d}A_\alpha \qquad \leq \left(\int_{\mathbb{H}} |f|^{2q}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}} |D_{\omega,\alpha}(h)|^{q'}\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \|f\|^2_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|D_{\omega,\alpha}(h)\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq 2\|f\|^2_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc, en prenant $C_{p,\alpha} = \sqrt{2}C_{2,\alpha}\widetilde{\delta}_{p,\alpha}$ alors il découle de l'inégalité (4.11) que :

$$\int_{\mathbb{H}} |Tf|^2 h\omega \mathrm{d}A_\alpha \leq [C_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)]^2\|f\|^2_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.12}$$

Puis on déduit du Lemme 4.4.1 et de l'inégalité (4.12) que :

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \sup_{h\geq 0, \|h\|_{L^{q'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}=1} \int_{\mathbb{H}} |Tf|^2 h\omega \mathrm{d}A_\alpha \\ &\leq [C_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)]^2\|f\|^2_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

Soit, $\|Tf\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$ pour tout $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$; ce qui entraîne que $\|T\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)$. Ce qui prouve le résultat annoncé vue que $C_{p,\alpha}$ ne dépend pas de ω et ω est arbitrairement choisit dans $(B_{p,\alpha})$. ∎

4.5 Estimations optimales pour le projecteur de Bergman

4.5.1 Continuité du projecteur de Bergman

Nous allons établir une autre preuve de la continuité du projecteur de Bergman. On utilise le fait que l'opérateur dyadique $Q_\alpha = \sum_{\beta\in\{0,\frac{1}{3}\}} Q^\beta_\alpha$ est équivalent au projecteur maximal de Bergman P^+_α(voir Théorème 4.2.1). Nous commençons alors par montrer que Q_α est borné sur $L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$.

Théorème 4.5.1. Soient $\beta \in \{0, \frac{1}{3}\}$ et $\omega \in (B_{2,\alpha})$ alors il existe une constante $C^\beta_{2,\alpha}$ indépendante de ω telle que pour tout $f \in L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$:

$$\|Q^\beta_\alpha f\| \leq C^\beta_{2,\alpha}B_{2,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Preuve. Soit $I \in \mathcal{D}^\beta$ un intervalle dyadique ; comme $|I|^{2+\alpha} = \pi|Q_I|_\alpha = \pi\delta_\alpha|T_I|_\alpha$ (voir Remarque 4.2.1) alors on a :

$$\frac{1}{|I|^{2+\alpha}} = \frac{1}{\pi|Q_I|_\alpha} = \frac{\delta_\alpha B_{2,\alpha}(\omega)|Q_I|_\alpha}{\pi|Q_I|_{\omega,\alpha}|Q_I|_{\omega^{-1},\alpha}} \leq \frac{\delta_\alpha B_{2,\alpha}(\omega)|T_I|_\alpha}{\pi|Q_I|_{\omega,\alpha}|Q_I|_{\omega^{-1},\alpha}}.$$

Donc, en prenant $\delta^\beta_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\pi}$on obtient :

$$\frac{1}{|I|^{2+\alpha}} \leq \delta^\beta_\alpha \frac{B_{2,\alpha}(\omega)|T_I|_\alpha}{|Q_I|_{\omega,\alpha}|Q_I|_{\omega^{-1},\alpha}}. \tag{4.13}$$

Soient $f, g \in L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, comme $(T_I)_{I\in\mathcal{D}^\beta}$ est une partition de $\mathbb{H}$ alors on déduit de l'inégalité (4.13) que :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{H}} Q_\alpha^\beta(f) g\omega \mathrm{d}A_\alpha\right| &= \left|\sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1}{|I|^{2+\alpha}}\langle f, 1_{Q_I}\rangle_\alpha \langle g\omega, 1_{Q_I}\rangle_\alpha\right| \\
&= \left|\sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \frac{1}{|I|^{2+\alpha}}\left(\int_{Q_I} f\mathrm{d}A_\alpha\right)\left(\int_{Q_I} g\omega\mathrm{d}A_\alpha\right)\right| \\
&\leq \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} |T_I|_\alpha \left(\frac{1}{|Q_I|_{\omega^{-1},\alpha}}\int_{Q_I} f\mathrm{d}A_\alpha\right)\left(\frac{1}{|Q_I|_{\omega,\alpha}}\int_{Q_I} |g|\omega\mathrm{d}A_\alpha\right) \\
&= \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \int_{T_I}\left(\frac{1_{Q_I}(\xi)}{|Q_I|_{\omega^{-1},\alpha}}\int_{Q_I} |f|\omega\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha\right)\left(\frac{1}{|Q_I|_{\omega,\alpha}}\int_{Q_I} |g|\omega\mathrm{d}A_\alpha\right)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&\leq \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\sum_{I\in\mathcal{D}^\beta} \int_{T_I} m_{\omega^{-1},\alpha}(f\omega)(\xi) m_{\omega,\alpha}(g)(\xi)\mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\
&= \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\int_{\mathbb{H}} m_{\omega^{-1},\alpha}(f\omega)(\xi) m_{\omega,\alpha}(g)(\xi)\omega^{-\frac{1}{2}}(\xi)\omega^{\frac{1}{2}}(\xi)\mathrm{d}A_\alpha \\
&\leq \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\left(\int_{\mathbb{H}}(m_{\omega^{-1},\alpha}(f\omega))^2\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{H}}(m_{\omega,\alpha}(g))^2\omega\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \delta_\alpha^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\|m_{\omega^{-1},\alpha}(f\omega)\|_{L^2(\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha)}\|m_{\omega,\alpha}(g)\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}.
\end{aligned}$$

Où la dernière inégalité s'obtient en appliquant l'inégalité de Hölder. D'autre part, du Corollaire 4.3.1 on déduit qu'il existe deux constantes $A_{2,\alpha}$ et $A'_{2,\alpha}$ indépendante de ω telles que :

$$\|m_{\omega,\alpha} g\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)} \leq A_{2,\alpha}\|g\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}$$

$$\text{et} \qquad \|m_{\omega^{-1},\alpha}(f\omega)\|_{L^2(\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha)} \leq A'_{2,\alpha}\|f\omega\|_{L^2(\omega^{-1}\mathrm{d}A_\alpha)} = A'_{2,\alpha}\|f\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Ainsi en prenant $C_{2,\alpha}^\beta = \delta_\alpha^\beta A_{2,\alpha}A'_{2,\alpha}$ on obtient :

$$\left|\int_{\mathbb{H}} Q_\alpha^\beta(f) g\omega\mathrm{d}A_\alpha\right| \leq C_{2,\alpha}^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}\|g\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.14}$$

On déduit alors du théorème de représentation de Riesz et de l'inégalité (4.14) que :

$$\|Q_\alpha^\beta(f)\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)} = \sup_{\|g\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}=1}\left|\int_{\mathbb{H}} Q_\alpha^\beta(f) g\omega\mathrm{d}A_\alpha\right| \leq C_{2,\alpha}^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Soit, $\|Q_\alpha^\beta(f)\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{2,\alpha}^\beta B_{2,\alpha}(\omega)\|f\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)}$, pour tout $f \in L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)$. D'où

$$\|Q_\alpha^\beta\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)\to L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{2,\alpha}^\beta B_{2,\alpha}(\omega).$$

■

Corollaire 4.5.1. Il existe une constante $C_{2,\alpha} > 0$ telle que pour tout $\omega \in (B_{2,\alpha})$:

$$\|P_\alpha\|_{L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)\to L^2(\omega\mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{2,\alpha}B_{2,\alpha}(\omega).$$

Preuve. Ce résultat découle immédiatement du Théorème 4.1.2 et du Théorème 4.5.1. De plus, il suffit de prendre $C_{2,\alpha} = \frac{32^{2+\alpha}}{4}(C_{2,\alpha}^{0} + C_{2,\alpha}^{\frac{1}{3}})$. ∎

Proposition 4.5.1. Soit $1 < p < +\infty$, quelque soit $\omega \in (B_{2,\alpha})$

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}.$$

Preuve. On rappelle que le crochet de dualité usuel entre $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ est défini par :

$$\langle f, g\rangle_{\omega,\alpha} = \int_{\mathbb{H}} f\overline{g}\omega \mathrm{d}A_\alpha; \quad f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha), \quad g \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha).$$

Soient $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $g \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, alors du fait que P_α est un opérateur auto-adjoint relativement au crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ on a :

$$\langle P_\alpha f, g\rangle_{\omega,\alpha} = \langle P_\alpha f, g\omega\rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha(g\omega)\rangle_\alpha.$$

Ainsi de l'inégalité de Hölder on obtient :

$$|\langle P_\alpha f, g\rangle_{\omega,\alpha}| \;=\; \left|\int_{\mathbb{H}} fP_\alpha(g\omega)\omega^{\frac{1}{p}}\omega^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}A_\alpha\right| \le \left(\int_{\mathbb{H}} |f|^p\omega \mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{H}} |P_\alpha(g\omega)|^{p'}\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha\right)^{\frac{1}{p'}}$$

c'est-à-dire que

$$|\langle P_\alpha f, g\rangle_{\omega,\alpha}| \le \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|P_\alpha(g\omega)\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)} \tag{4.15}$$

D'autre part, comme $g \in L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ alors $g\omega \in L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)$ et P_α étant borné de $L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)$ sur lui même, (car $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha})$) puisque $\omega \in (B_{p,\alpha})$ on déduit que :

$$\begin{aligned}\|P_\alpha(g\omega)\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)} &\le \|g\omega\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}\|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}\\ &= \|g\|_{L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (4.15) devient :

$$|\langle P_\alpha f, g\rangle_{\omega,\alpha}| \le \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|g\|_{L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.16}$$

f et g étant quelconques, alors il découle du Théorème de représentation de Riesz et de l'inégalité (4.16) que :

$$\begin{aligned}\|P_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}=1} |\langle P_\alpha f, g\rangle_{\omega,\alpha}|\\ &\le \|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}\|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}.\end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \le \|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.17}$$

Par dualité, en utilisant le fait que $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha})$ lorsque $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et le crochet de dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega^{1-p'},\alpha}$ entre $L^p(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)$ et $L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)$ on obtient aussi que :

$$\|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)} \le \|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}. \tag{4.18}$$

On déduit donc le résultat annoncé des inégalités (4.17) et (4.18). ■

On peut enfin établir le résultat de Sandra-Pott et de Maria Carmen Reguera suivant :

Théorème 4.5.2. (Sandra Pott et Carmen Reguera)
Pour $1 < p < +\infty$, il existe une constante $\widetilde{C}_{p,\alpha} > 0$ telle que pour tout $\omega \in (B_{p,\alpha})$ on a :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \widetilde{C}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}. \tag{4.19}$$

Preuve. Soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$ avec $1 < p < +\infty$. Supposons d'abord que $p \geq 2$ alors $\max(1, \frac{1}{p-1}) = 1$. En vertu du Corollaire 4.5.1 pour tout $\omega \in (B_{2,\alpha})$ on a :

$$\|P_\alpha\|_{L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{2,\alpha}B_{2,\alpha}(\omega),$$

où $C_{2,\alpha}$ est une constante indépendante de ω. Il découle donc du Théorème 4.4.2 qu'il existe une constante $C_{p,\alpha} > 0$ indépendante de ω telle que

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega) = C_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}.$$

Maintenant, si $1 < p < 2$ alors $p' > 2$ et $\frac{1}{p-1} = \max(1, \frac{1}{p-1})$; comme $\omega^{1-p'} \in (B_{p',\alpha})$ alors par analogie au cas précédent et de la Proposition 4.5.1 on obtient :

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'} \mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'} \mathrm{d}A_\alpha)} \\
&\leq C_{p',\alpha}B_{p',\alpha}(\omega^{1-p'}) = C_{p',\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}} \\
&= C_{p',\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq \widetilde{C}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}, \quad \text{où} \quad \widetilde{C}_{p,\alpha} = \max(C_{p,\alpha}, C_{p',\alpha}).$$ ■

4.5.2 Contrôle optimal du projecteur de Bergman

Dans cette partir, nous montrons que l'inégalité (4.19) est optimale.

Définition 4.5.1. Soient f et g deux fonctions numériques positives à une variable réelle. On dit que g croît plus lentement que f lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Définition 4.5.2. Pour $1 < p < +\infty$ et $-1 < \alpha < +\infty$, on dira que l'estimation (4.19) valide pour tout poids ω de la classe $(B_{p,\alpha})$ est optimale en terme de la constante $B_{p,\alpha}(\omega)$ lorsqu'on ne peut pas trouver une fonction $\phi(x)$ qui croît plus lentement que x telle que :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C\phi\left([B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}\right). \tag{4.20}$$

quel que soit $\omega \in (B_{p,\alpha})$, où $C > 0$ est une constante indépendante de ω.

Si $D_R(x)$ désigne le démi-disque supérieur contenu dans $\mathbb{H}$, de centre $x \in \mathbb{R}$ et de rayon $R > 0$ (on note $D_R(0)$ par D_R) notons :

$$K'_{p,\alpha}(\omega) := \sup_{R>0, x\in\mathbb{R}} \frac{|D_R(x)|_{\omega,\alpha}}{|D_R(x)|_\alpha}\left(\frac{|D_R(x)|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|D_R(x)|_\alpha}\right)^{p-1} \text{ et } K_{p,\alpha}(\omega) := \sup_{R>0} \frac{|D_R|_{\omega,\alpha}}{|D_R|_\alpha}\left(\frac{|D_R|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|D_R|_\alpha}\right)^{p-1}.$$

Lemme 4.5.1. Soient $1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ et ω un poids sur $\mathbb{H}$. Alors, on a : $d_{p,\alpha}^{-1} K_{p,\alpha}(\omega) \leq B_{p,\alpha}(\omega) \leq d_{p,\alpha} K'_{p,\alpha}(\omega)$ avec $d_{p,\alpha} = (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)}$.

Preuve. Soit $R > 0$, en considérant l'intervalle $I = [-R, R]$, D_R est contenu dans le boxe de Carleson $Q_I = [-R, R] \times [0, 2R]$. En observant la figure 4.5.1 cas (a), si on prend $R' = \sqrt{5}R$ alors Q_I est contenu dans $D_{R'}$ d'où $D_R \subseteq Q_I \subseteq D_{R'}$. En utilisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$|D_{R'}|_\alpha = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)(\sqrt{5}R)^{2+\alpha} = (\sqrt{5})^{2+\alpha}|D_R|_\alpha.$$

Par conséquent, $|D_R|_\alpha \leq |Q_I|_\alpha \leq (\sqrt{5})^{2+\alpha}|D_R|_\alpha$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{|D_R|_{\omega,\alpha}}{|D_R|_\alpha}\left(\frac{|D_R|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|D_R|_\alpha}\right)^{p-1} &\leq (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)}\frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\left(\frac{|Q_I|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{p-1} \\ &\leq (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)} B_{p,\alpha}(\omega).\end{aligned}$$

R étant arbitraire, il s'ensuit que :

$$K_{p,\alpha}(\omega) \leq (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)} B_{p,\alpha}(\omega). \tag{4.21}$$

Pour la deuxième inégalité, si on fixe I un intervalle de centre $x \in \mathbb{R}$, en observant la figure 4.5.1 cas (b), alors Q_I est contenu dans $D_R(x)$ avec $R = \frac{\sqrt{5}}{2}|I|$. Puis, en prenant $J = [-R + x, R + x]$, $D_R(x)$ est contenu dans Q_J d'où $Q_I \subseteq D_R(x) \subseteq Q_J$. Mais, comme $|J| = 2R = \sqrt{5}|I|$, on vérifie que $|Q_J|_\alpha = (\sqrt{5})^{(2+\alpha)}|Q_I|_\alpha$. Ainsi, $|Q_I|_\alpha \leq |D_R(x)|_\alpha \leq (\sqrt{5})^{(2+\alpha)}|Q_I|_\alpha$ et donc,

$$\begin{aligned}\frac{|Q_I|_{\omega,\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\left(\frac{|Q_I|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|Q_I|_\alpha}\right)^{p-1} &\leq (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)}\frac{|D_R(x)|_{\omega,\alpha}}{|D_R(x)|_\alpha}\left(\frac{|D_R(x)|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|D_R(x)|_\alpha}\right)^{p-1} \\ &\leq (\sqrt{5})^{p(2+\alpha)} K'_{p,\alpha}(\omega).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

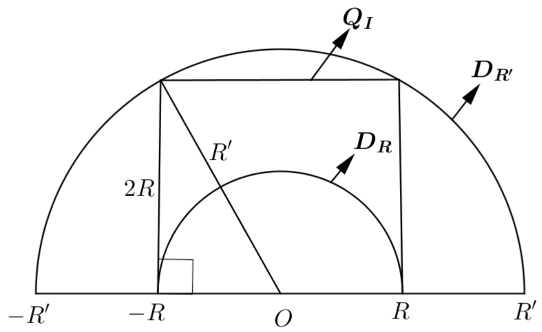
$$B_{p,\alpha}(\omega) \leq 5^{p(1+\frac{\alpha}{2})} K'_{p,\alpha}(\omega). \tag{4.22}$$

Il découle donc de (4.21) et (4.22) que

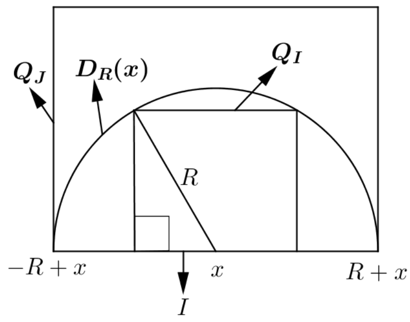
$$5^{-p(1+\frac{\alpha}{2})} K_{p,\alpha}(\omega) \leq B_{p,\alpha}(\omega) \leq 5^{p(1+\frac{\alpha}{2})} K'_{p,\alpha}(\omega).$$

■

Corollaire 4.5.2. Pour $1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ et $0 < \delta < 1$, si on considère



(a) $R' = \sqrt{5}R$



(b) $R = \frac{\sqrt{5}|I|}{2}$

Figure 4.5.1

$\omega(z) = |z|^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)}$ alors $\omega \in (B_{p,\alpha})$ et pour $d_{p,\alpha} = 5^{p(1+\frac{\alpha}{2})}$ on a

$$d_{p,\alpha}^{-1}\frac{\delta^{1-p}}{p} \leq B_{p,\alpha}(\omega) \leq d_{p,\alpha}\delta^{1-p}.$$

Preuve. Soit $R > 0$, on sait que $|D_R|_\alpha = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right) R^{2+\alpha}$, alors en utilisant de nouveau les coordonnées polaires on a :

$$\begin{aligned}|D_R|_{\omega,\alpha} &= \frac{2}{\pi}(\alpha+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)\int_0^R r^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)+\alpha+1}\mathrm{d}r\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)\frac{R^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)+2+\alpha}}{(p-1)(1-\delta)+1}\\ &= |D_R|_\alpha\frac{R^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)}}{(p-1)(1-\delta)+1}.\end{aligned}$$

De même, en remarquant que $(1-p')(1-p) = 1$ on a aussi,

$$\begin{aligned}|D_R|_{\omega^{1-p'},\alpha} &= \frac{2}{\pi}(\alpha+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)\int_0^R r^{(2+\alpha)(\delta-1)+\alpha+1}\mathrm{d}r\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)\frac{R^{(2+\alpha)(\delta-1)+2+\alpha}}{\delta}\\ &= |D_R|_\alpha\frac{R^{(2+\alpha)(\delta-1)}}{\delta}.\end{aligned}$$

Il en résulte que, $\frac{|D_R|_{\omega,\alpha}}{|D_R|_\alpha}\left(\frac{|D_R|_{\omega^{1-p'},\alpha}}{|D_R|_\alpha}\right)^{p-1} = \frac{\delta^{1-p}}{(p-1)(1-\delta)+1}$. Alors on déduit que $K_{p,\alpha}(\omega) = \frac{\delta^{1-p}}{(p-1)(1-\delta)+1}$. Mais, d'après le Lemme 4.5.1 on a $d_{p,\alpha}^{-1}K_{p,\alpha}(\omega) \leq B_{p,\alpha}(\omega) \leq d_{p,\alpha}K_{p,\alpha}(\omega)$ avec $d_{p,\alpha} = 5^{p(1+\frac{\alpha}{2})}$ et $1 \leq 1+(p-1)(1-\delta) \leq p$; on déduit alors que $\frac{d_{p,\alpha}^{-1}}{p}\delta^{1-p} \leq B_{p,\alpha}(\omega) \leq d_{p,\alpha}\delta^{1-p}$. ∎

Lemme 4.5.2. Il existe une constante $R_\alpha > 1$ dépendant uniquement de α telle que pour tous $z, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}$, si $|z| \geq R_\alpha$, $|\xi_1| \leq 1$ et $|\xi_2| \leq 1$ alors $arg\left(\frac{z-\overline{\xi}_1}{z-\overline{\xi}_2}\right)^{2+\alpha} \leq \frac{\pi}{4}$.

Preuve. Supposons d'abord qu'une telle constante existe. Fixons $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}$ avec $|\xi_i| \leq 1$, $i = 1, 2$ et choisissons $z \in \mathbb{H}$ tel que $|z| \geq R_\alpha$. Soient A_i le point d'affixe $\overline{\xi}_i$, $i = 1, 2$ et M le point d'affixe z alors $\theta_\alpha = arg((z-\overline{\xi}_1), (z-\overline{\xi}_2))$ désigne l'angle en M dans le triangle de sommets respectifs A_1, A_2

et M. Nous voulons maximiser la valeur de θ_α. Désignons par M' le point d'intersection du segment $[A_1, M]$ et le cercle de centre O et de rayon R_α (voir figure 4.5.2) et θ'_α l'angle en M' dans le triangle de sommets A_1, A_2 et M'. Des propriétés de la géométrie élémentaire on observe que $\theta'_\alpha \geq \theta_\alpha$; il est donc nécessaire de choisir M tel que $|z| = R_\alpha$.

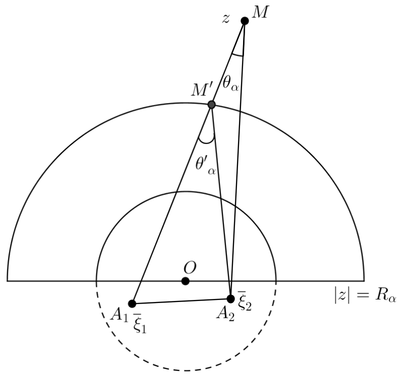


Figure 4.5.2

Désormais, on fixe le point M tel que $|z| = R_\alpha$. Soit B_i le point d'intersection du segment $[A_i, M]$ et la droite réelle (voir figure 4.5.3), alors θ_α est aussi l'angle en M dans le triangle de sommets B_1, B_2 et M qui est maximal lorsque la distance entre B_1 et B_2 vaut 2. On peut donc prendre $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$.

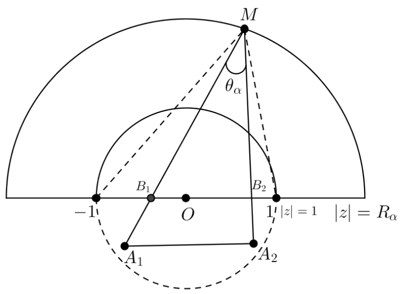


Figure 4.5.3

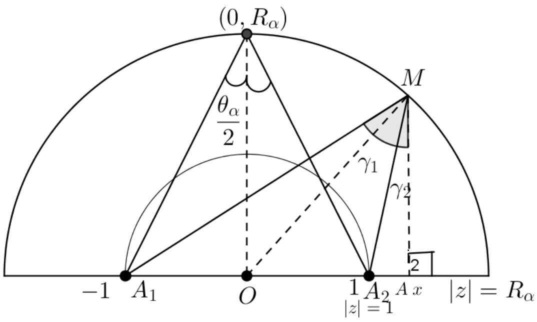
Maintenant, fixons $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$ et supposons que $z = x + \mathrm{i}y$ alors $y = \sqrt{R_\alpha^2 - x^2}$ puisque $|z| = R_\alpha$. Désignons par γ_{i}, $\mathrm{i} = 1, 2$ l'angle en M dans le triangle de sommets respectifs A_{i}, M, et A où A est le point d'affixe $z_A = x$. Par symétrie, on peut supposer que $0 \leq x < R_\alpha$ (voir figure 4.5.4). D'après la figure 4.5.4 on a : $\tan \gamma_1 = \frac{x+1}{\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}}$,

$$\tan \gamma_2 = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}} & \text{si } 1 \leq x < R_\alpha, \\ \frac{1-x}{\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_\alpha(x) = \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 & \text{si } 1 \leq x < R_\alpha, \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

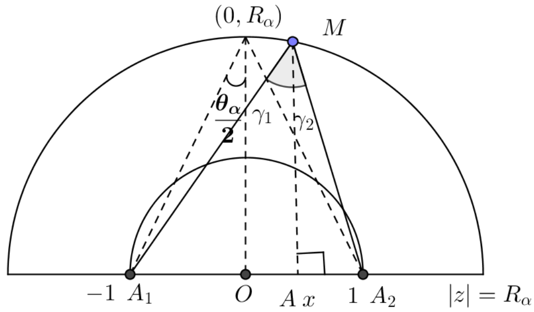
Dans les deux cas, en utilisant le fait que $\mathrm{Acrtg}(a) + \mathrm{Acrtg}(b) = \mathrm{Acrtg}(\frac{a+b}{1-ab})$ on obtient que :

$$\theta_\alpha(x) = \mathrm{Acrtg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}}\right) + \mathrm{Acrtg}\left(\frac{1-x}{\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}}\right) = \mathrm{Acrtg}\left(\frac{2\sqrt{R_\alpha^2 - x^2}}{R_\alpha^2 - 1}\right).$$

On vérifie que la fonction $x \longmapsto \theta_\alpha(x)$ est décroissante sur $[0, R_\alpha[$. Ainsi, l'angle θ_α atteint sa valeur maximale lorsque $x = 0$ c'est-à-dire que $z = iR_\alpha$ ou bien que $M(0, R_\alpha)$.



(a) Cas où $1 \leq x \leq R_\alpha$



(b) Cas où $0 \leq x \leq 1$

Figure 4.5.4

Finalement, on a montrer que, quelques soient $z, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}$ tels que $|z| \geq R_\alpha$, $|\xi_i| \leq 1$, $i = 1, 2$ on a : $arg((z - \overline{\xi}_1), (z - \overline{\xi}_2)) \leq \theta_\alpha = 2 \arctan \frac{1}{R_\alpha}$. Ainsi, pour avoir $(2 + \alpha) arg((z - \overline{\xi}_1), (z - \overline{\xi}_2)) \leq \frac{\pi}{4}$, il suffit que $2(2 + \alpha) \arctan \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\pi}{4}$, soit $R_\alpha = \left(\tan \frac{\pi}{8}(2 + \alpha)^{-1}\right)^{-1}$. ∎

Lemme 4.5.3. Soient $1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ et $0 < \delta < 1$. Alors pour le poids $\omega(z) = |z|^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)}$, il existe une constante $\widetilde{C}_{p,\alpha} > 0$ indépendante de δ telle que :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \geq \widetilde{C}_{p,\alpha} [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1, \frac{1}{p-1})}. \tag{4.23}$$

Preuve. Supposons d'abord que $1 < p \leq 2$ et considérons la fonction $f(z) = |z|^{(2+\alpha)(\delta-1)} 1_D(z)$, $z \in \mathbb{H}$ avec $D = \{z \in \mathbb{H} : |z| \leq 1\}$. Alors $f \in L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ et $\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \frac{C_\alpha}{\delta}$. En effet, par passage en coordonnées polaires on a :

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_D |\xi|^{(2+\alpha)(\delta-1)p} |\xi|^{(2+\alpha)(1-\delta)(p-1)} (Im(\xi))^\alpha \mathrm{d}A(\xi) \\ &= \frac{2(\alpha + 1)}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^\alpha \mathrm{d}\theta \right) \int_0^1 |r|^{(2+\alpha)(\delta-1)+\alpha+1} \mathrm{d}r \\ &= \frac{C_\alpha}{\delta} \quad \text{avec} \quad C_\alpha = \frac{2(\alpha + 1)}{\pi(\alpha + 2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^\alpha \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons $z \in \mathbb{H}$ tel que $|z| \geq R_\alpha$ où $R_\alpha \geq 1$ désigne la constante du Lemme 4.5.2 ; alors quelque soit $\xi \in D$ on a : $0 \leq \theta_\alpha = arg\left(\frac{z-1}{z-\overline{\xi}}\right)^{2+\alpha} \leq \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta_\alpha \leq 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |P_\alpha f(z)| &= \frac{2^\alpha}{|z - 1|^{2+\alpha}} \left| \int_D f(\xi) \left(\frac{z - 1}{z - \overline{\xi}} \right)^{2+\alpha} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \right| \\ &= \frac{2^\alpha}{|z - 1|^{2+\alpha}} \left| \int_D \frac{f(\xi)|z - 1|^{2+\alpha}}{|z - \overline{\xi}|^{2+\alpha}} e^{i\theta_\alpha} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \right| \\ &\geq 2^\alpha \int_D \frac{f(\xi) \cos \theta_\alpha}{|z - \overline{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \\ &\geq \frac{2^\alpha}{\sqrt{2}} \int_D \frac{|\xi|^{(2+\alpha)(\delta-1)}}{|z - \overline{\xi}|^{2+\alpha}} \mathrm{d}A_\alpha(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{2^{\alpha}}{2^{2+\alpha+\frac{1}{2}}}|z|^{-(2+\alpha)}\int_D |\xi|^{(2+\alpha)(\delta-1)}\mathrm{d}A_\alpha(\xi)\\
&= \frac{\widetilde{C}_\alpha}{\delta}|z|^{-(2+\alpha)} \quad \text{avec} \quad \widetilde{C}_\alpha = \frac{C_\alpha}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Où on rappelle que pour $\xi \in D = \{z \in \mathbb{H} : |z| \leq 1\}$ on a : $|\xi| \leq 1 \leq R_\alpha \leq |z|$, d'où

$$|z-\overline{\xi}|^{-(2+\alpha)} \geq \frac{|\overline{\xi}|^{-(2+\alpha)}}{2^{2+\alpha}}.$$

Ainsi, pour tout $z \in D_\alpha = \{v \in \mathbb{H} : |v| \geq R_\alpha\}$,

$$|P_\alpha f(z)| \geq \frac{\widetilde{C}_\alpha}{\delta}|z|^{-(2+\alpha)}. \tag{4.24}$$

Il découle donc de l'inégalité (4.24) que :

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \int_{\mathbb{H}} |P_\alpha f(z)|^p \omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\\
&\geq \int_{D_\alpha} |P_\alpha f(z)|^p \omega(z)\mathrm{d}A_\alpha(z)\\
&\geq \frac{\widetilde{C}^p_\alpha(\alpha+1)}{\pi\delta^p}\int_{D_\alpha} |z|^{-(2+\alpha)p}|z|^{(2+\alpha)(p-1)(1-\delta)}(Im(z))^\alpha \mathrm{d}A_\alpha(z)\\
&= \frac{2\widetilde{C}^p_\alpha(\alpha+1)}{\pi\delta^p}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^\alpha \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{R_\alpha}^{+\infty}|r|^{(2+\alpha)(\delta(1-p)-1)+\alpha+1}\mathrm{d}r\right)\\
&= \frac{\widetilde{C}^p_\alpha}{\delta^p}\cdot\frac{C_\alpha}{\delta}\cdot\frac{R_\alpha^{(2+\alpha)\delta(1-p)}}{p-1}\\
&\geq [\widetilde{C}_{p,\alpha}B_{p,\alpha}(\omega)^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}]^p,
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{C}_{p,\alpha} = \widetilde{C}_\alpha(d_{p,\alpha})^{1-p'}R_\alpha^{-\frac{(2+\alpha)}{p'}}$. Où pour obtenir la dernière inégalité on a utilisé le fait que $\frac{1}{p-1} \geq 1$, $\|f\|^p_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} = \frac{C_\alpha}{\delta}$, $R_\alpha^{(2+\alpha)\delta(1-p)} \geq R_\alpha^{(2+\alpha)(1-p)}$ et d'après le Corollaire 4.5.2, $[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{p}{p-1}} \leq [d_{p,\alpha}\delta^{1-p}]^{\frac{p}{p-1}} = (d_{p,\alpha})^{p'}\delta^{-p}$. Donc, $\|P_\alpha f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \geq \widetilde{C}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)}$. Par suite, comme $\frac{1}{p-1} = \max(1, \frac{1}{p-1})$ $(1 < p \leq 2)$ on déduit que, $\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \geq \widetilde{C}_{p,\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}$. Maintenant, si $p \geq 2$ alors $1 < p' \leq 2$. Il vient de la Proposition 4.5.1 et de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)\to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} &= \|P_\alpha\|_{L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)\to L^{p'}(\omega^{1-p'}\mathrm{d}A_\alpha)}\\
&\geq \widetilde{C}_{p',\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega^{1-p'})]^{\frac{1}{p'-1}}\\
&= \widetilde{C}_{p',\alpha}B_{p,\alpha}(\omega) = \widetilde{C}_{p',\alpha}[B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, en prenant $\widetilde{C}_{p,\alpha} \leq \widetilde{C}_{p',\alpha}$, on obtient l'inégalité (4.23) pour $1 < p < +\infty$. ∎

Le résultat principale de cette partie est donne par le théorème qui suit.

Théorème 4.5.3. L'estimation (4.19) est optimale au sens de la Définition 4.5.2

Preuve. Supposons l'existence d'une fonction positive ϕ satisfaisant l'inégalité (4.20) pour tout $\omega \in (B_{p,\alpha})$; en particulier pour $\omega(z) = |z|^{(2+\alpha)(\delta-1)(p-1)}$ avec $0 < \delta < 1$. En posant

$X(\delta) = [B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}$, il découle alors des inégalités (4.20) et (4.23) que :

$$\widetilde{C}_{p,\alpha} X(\delta) \leq \|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C\phi(X(\delta)).$$

D'où

$$\frac{X(\delta)}{\phi(X(\delta))} \leq C\widetilde{C}_{p',\alpha}^{-1}. \tag{4.25}$$

Mais du Corollaire 4.5.2 il suit que $X(\delta) \simeq (\delta^{1-p})^{\max(1,\frac{1}{p-1})}$, d'où $\lim\limits_{\delta \to 0^+} X(\delta) = +\infty$. Donc d'après l'inégalité (4.25) on ne saurait avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\phi(x)} = +\infty$. Il est donc impossible que $\phi(x)$ croît plus lentement que x. ■

On déduit aussi le résultat suivant.

Corollaire 4.5.3. Soient $1 < p < +\infty$ et $-1 < \alpha < +\infty$ alors $\max\left(1, \frac{1}{p-1}\right)$ est la plus petite puissance τ telle que pour tout $\omega \in (B_{p,\alpha})$ on a :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha} [B_{p,\alpha}(\omega)]^\tau. \tag{4.26}$$

Où $C_{p,\alpha}$ est une constante ne dépendent pas de ω.

Preuve. Considérons la fonction positive $\phi(x) = x^{\tau'}$ avec $\tau' = \tau[\max(1, \frac{1}{p-1})]^{-1}$. Alors pour tout $\omega \in (B_{p,\alpha})$, l'inégalité (4.26) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\|P_\alpha\|_{L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha) \to L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)} \leq C_{p,\alpha} \phi\left([B_{p,\alpha}(\omega)]^{\max(1,\frac{1}{p-1})}\right).$$

Il découle donc, du Théorème 4.5.3 qu'on ne peut avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ puisque $\phi(x)$ ne peut croître plus lentement que x. Mais, $\frac{\phi(x)}{x} = x^{\tau'-1}$ et ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$; alors nécessairement $\tau' = \tau[\max(1, \frac{1}{p-1})]^{-1} \geq 1$ soit $\tau \geq \max(1, \frac{1}{p-1})$. ■

Tout compte fait, la notion de grille dyadique est un outil très improtant pour prouver les estimations optimales pour le projeceur de Bergman dans le disque unité. De plus, on déduit de ce résultat que l'estimation du Théorème 4.3.2 est optimale pour l'opérateur m_α. On peut aussi remarquer que le résultat le plus intéressant dans ce chapitre est le Lemme 4.2.1 puisqu'un résultat similaire en dimension complexe supérieur permettrait d'y prolonger le Théorème 4.5.3 et le corollaire 4.5.3.

♣ Conclusion ♣

L'objectif principal de ce mémoire était de caractériser les poids pour lesquels le projecteur de Bergman dans le disque unité est continu sur les espaces $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$, $p > 1$ (ou faiblement continu sur les espaces $L^1(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$) et de donner des estimations optimales de sa norme sur ces espaces pour $1 < p < +\infty$. Pour y parvenir, on s'est approprié quelques outils importants constituants le socle de notre travail ; nous avons défini le projecteur de Bergman à travers une brève présentation de l'espace de Bergman à poids dans le disque unité. Sur l'espace homogène $(\mathbb{D}, \mathrm{d}, \mathrm{d}A_\alpha)$ nous avons montré que la continuité (ou la continuité faible : cas $p = 1$) du projecteur de Bergman sur les espaces $L^p(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ était caractérisée par l'appartenance de ω à la classe $(B_{p,\alpha})$. Le problème des estimations optimales pour le projecteur de Bergman dans le disque unité a été transféré fidèlement sur le demi-plan supérieur. Puis, grâce à la méthode d'extrapolation de Rubio de Francia et la dualité, ce problème a été résolu en démontrant l'équivalence entre le projecteur maximal de Bergman et l'opérateur dyadique associé ; ce qui nous a permis d'obtenir des estimations optimales du projecteur de Bergman sur les espaces $L^2(\omega \mathrm{d}A_\alpha)$ à poids de Békollé-Bonami. La notion de grille dyadique a permis d'obtenir les estimations optimales pour le projecteur de Bergman dans le disque unité. Cependant, il convient de mentioner que le problème d'estimations optimales pour le projecteur de Bergman en dimension complexe supérieure sur la boule unité n'a pas encore été résolu . De plus, on ne sait pas s'il est possible d'avoir des estimations optimales "faible" du projecteur de Bergman dans le cas $p = 1$.

♣ Bibliographie ♣

[1] A.Aleman, and O. Constantin *The Bergman projection on vector-valued L^2-spaces with operator-valued weights*, J.Funct.Anal. **262** (5) (2012) 2359-2378. 3

[2] K.Astala, T. Iwaniec, and E.Saksman. *Beltrami Operator in the plane*, Duke Math. J. **107** (1) 27-56. 2001 2

[3] H. Brezis, *Function Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, March 2010. 4, 8

[4] D. Békollé, *inégalités à poids pour le projecteur dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$*, sutidia math **71** (1981/82), n° 3. 2, 32, 33

[5] D. Békollé, and Aline Bonami, *inégalités à poids pour le noyau de Bergman*, C.R. Acad. Sci. Paris. A-B **286** (1978), n° 18, A775-A778 (French, with English Summary) 2

[6] A. P. Calderòn, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. **57** (1976), 297-306. 1

[7] M. Chebeli, *Analyse Hilbertienne*, Centre de publication universitaire Tunis, 2001. 8

[8] R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lect notes Springer Verley, 1971. 1, 13

[9] R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, ibid.**51** 241-250. 1, 2, 32, 53

[10] D. V. Cruz-Uribe, José Maria Martell, and Carlos Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, Operator Theory : Advances and Applications, vol. **215**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. 71

[11] O. Dragicevic et al, *Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces*, Publ. Mat. **49** (2005), no. 1, 73-91. 71

[12] G. B. Folland, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), New York, 1984. 13, 69

[13] L. Grasfakos, *Classical Fourier Analysis*, graduate texts in mathematics, GTM **249**, Springer-Verlag, 2008. 4, 7, 12

[14] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces, graduate texts in mathematics*, Vol **199**, Springer-Verlag, New-York, 2000. 27, 31

[15] R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227-251. 1

[16] T. Hytönen, *The Sharp weighted bound for general Calderòn-Zygmund operators*, Annals of mathematics. **175** (2012), no. 3, 1473-1506. 3

[17] T. Hytönen, M. Lacey, C. Pérez, *Non-probabilistic proof of A_2 theorem and sharp weighted bounds for the q-variation of singular integrals*, available at http ://arxiv.org/abs/, (2012) 1202-2229. 66

[18] A. K. Lerner, *An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 8, 2829-2833. 70

[19] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math.Soc. **165** (1972), 207-226. 1, 47

[20] S.Petermichl, *The sharp bound for the Hilbert Transform on weighted Lebesgue spaces in term of the classical A_p characteristic*, Amer. J. Math. **129** (2009), no. 5, 1355-1375. 2

[21] S. Pott and M. C. Reguera, *Sharp Békollé Estimates for the Bergman projection*, J.Funct. Anal, **265** (2013) 3233-3244 . 3, 62

[22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, Second edition, 1995. 10